TRABAJO DE FIN DE GRADO.

COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DE VIGAS CONTINUAS

Grado en Ingeniería Mecánica.

Departamento de mecánica de medios continuos y teoría de estructuras.

Autor:

Daniel Ramírez Rodríguez

Tutor:

José Fernández Sáez

Leganés Curso 2016/2017

Indice de contenidos.

Indice de imágenes.

Indice de tablas.

1. Introducción y objetivos.

1.1. Motivación.

Como introducción a este proyecto se debe conocer la importancia de la utilización de vigas continuas en muchos de los ámbitos de la vida cotidiana, siendo los más importantes la construcción y las obras públicas. A continuación se mostrarán varios ejemplos de vigas continuas que se pueden observar en distintos ámbitos.

En el ámbito de la construcción, el ejemplo más claro y fácil de ver son las naves industriales, ya que su parte estructural se compone de varios pórticos unidos entre sí mediante correas. Gracias a estor pórticos, los cuales están compuestos por vigas continuas, dichas naves industriales toman forma y consiguen alcanzar los requisitos y condiciones dimensionales y mecánicas que hayan sido impuestos antes de su construcción. Por tanto, podemos decir que las vigas continuas son uno de los elementos más importantes en estas construcciones.

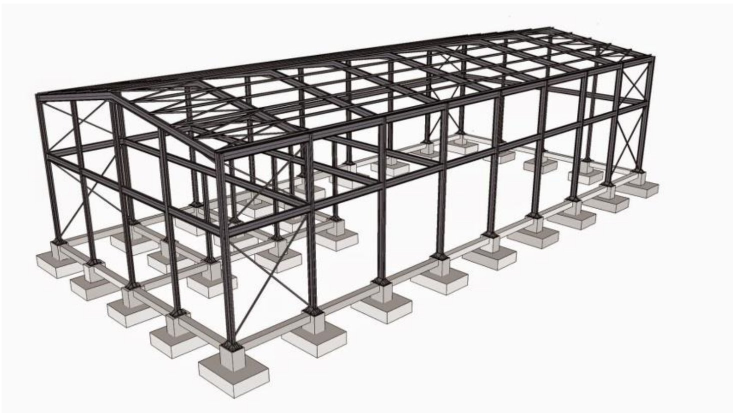


Imagen 1.2.1. Estructura de nave industrial.

Además de encontrarnos vigas continuas en naves industriales también podemos encontrarlas en las viviendas convencionales, sobre todo como elemento de soporte de techos y tejados. Estas vigas pueden ser además de varios materiales ya que en este aspecto, además de buscar las condiciones mecánicas necesarias, también se buscan condiciones estéticas, por lo que es muy común la utilización de vigas de madera para las estructuras de los techos en interiores.

Imagen 1.2.2. Ejemplo de viga de madera en el interior de una vivienda

Otro ejemplo de viga continua en el ámbito doméstico, siendo en este caso una viga en voladizo, son los escalones que se encuentran empotrados en la pared, que no son más que un simple ejemplo de la viga en voladizo que tanto se estudia en las asignaturas de teoría de estructuras.

Imagen 1.2.3. Escalones empotrados en la pared.

En cuanto a las obras públicas, los elementos en los que más podemos observar las vigas continuas son los puentes, ya sean grandes puentes de hormigón o puentes construidos a partir de una estructura metálica.

Imagen 1.2.4. Puente de hormigón.

En el ejemplo anterior podemos observar un puente de hormigón convencional en el que además se pueden observar vigas continuas de varios vanos, ya que los pilares hacen que dichas vigas tengan más de 2 apoyos. Este tipo de puentes son el ejemplo más claro de viga continua pues una vez construido, dichas vigas se pueden observar perfectamente al pasar por debajo de ellos, pudiendo observar sus dimensiones, su material y el tipo de viga que ha sido utilizado.

Además de encontrar vigas continuas en dichos puentes también podemos encontrarlas en los puentes metálicos construidos mediante una estructura metálica. En estos puentes se pueden observar numerosas vigas continuas, pues están formados por una estructura articulada generalmente metálica.

Imagen 1.2.5. Puente de estructura metálica.

Para terminar con los distintos ejemplos de vigas continuas, también se pueden observar dichas vigas en los aparcamientos convencionales, siendo éstas vigas en voladizo como las que se mencionaron anteriormente.

Imagen 1.2.6. Aparcamiento en marquesina.

Pero no solo existen vigas continuas en grandes construcciones y obras públicas sino que se pueden observar en incontables elementos, ya que muchos de los objetos cotidianos son modelos de vigas continuas con sus respectivos apoyos y condiciones de contorno. Uno de los muchos ejemplos de vigas continuas que se pueden encontrar podría ser una barra de sujeción de las cortinas de una ventana. Esta barra es una barra de sección continua con dos o más apoyos de la que cuelgan las cortinas. Esto no es más que un ejemplo real de una viga continua con varios apoyos sobre la que está actuando una carga distribuida hacia abajo a lo largo de toda la viga.

Otro ejemplo puede ser la barra interior de un armario sobre la que hay colgadas varias perchas, la cual si se mira de una manera más teórica, se puede ver una viga continua biempotrada con varias cargas puntuales a lo largo de la viga que ejercen un esfuerzo cortante en la sección.

Estos han sido solo varios ejemplos de los muchos que existen de vigas continuas en la vida real ya que el objetivo de este trabajo no es conocerlos todos sino conocer la importancia que tienen estas vigas en muchos ámbitos de la vida cotidiana para después poder estudiarlos de distintas maneras.

1.2. Objetivos.

Se conoce como vibración mecánica al movimiento oscilatorio de una partícula o un cuerpo respecto a una posición de equilibrio. Existen diversas causas de estas vibraciones como pueden ser los desajuntes en los mecanismos, desequilibrios, oscilaciones o movimientos relativos entre superficies de contacto. Como consecuencia de estas vibraciones se pueden dar diversos problemas como pueden ser el aumento de esfuerzos y tensiones, pérdidas de energía, desgastes o ruidos molestos. Además atendiendo a las vibraciones en vigas continuas pueden ocasionar daños por fatiga, grietas o fracturas en la sección de la viga. La mayoría de las vibraciones en máquinas o estructuras son indeseables debido al aumento de esfuerzos y pérdidas de energía por tanto se debe eliminarlas o reducirlas en la medida de lo posible mediante un diseño adecuado.

Se conoce como frecuencia de vibración al número de veces que la viga oscila por segundo y se representa en herzios. Atendiendo a la frecuencia las vibraciones se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Muy baja frecuencia → Menos de 1Hz
- Baja frecuencia → Entre 1Hz y 20Hz
- Alta frecuencia → Entre 20Hz y 1000Hz

El objetivo fundamental de este proyecto es el la obtención de las frecuencias de vibración de vigas continuas, es decir aquellas compuestas por más de un vano. Si bien el estudio de las vibraciones de vigas de un vano es un problema clásico, cuya solución está recogida en multitud de libros de texto, el caso de vigas continuas está mucho menos estudiado. Así se han planteado los siguientes objetivos parciales:

1. Plantear el modelo de las vibraciones por flexión de vigas continuas
2. Plantear los criterios de solución de dicho problema

3. Aplicar la formulación al caso de vigas con dos vanos y diferentes condiciones de apoyo para obtener las frecuencias propias de vibración
4. Analizar la influencia de algunos parámetros en dichas frecuencias propias

Uno de los objetivos de este proyecto es el de la creación de un modelo de vibración libre para así poder calcular, conocer y evaluar las frecuencias propias en distintos ejemplos de vigas continuas. La frecuencia propia es la frecuencia característica de cada uno de los sistemas vibratorios en la vibración libre, entendiendo como vibración libre como la vibración debida a una excitación instantánea, es decir, sin excitación externa. Ejemplos de vibración libre pueden ser el golpe de un martillo en una viga de acero o la vibración de un trampolín una vez que el nadador ha saltado al agua.

Para calcular dichas frecuencias se modelizará una viga continua con uno, dos o tres apoyos variando entre estos entre apoyos simples, partes libres y empotramientos tal y como se muestra en la figura, en la que se muestra un ejemplo del modelo que se utilizará para el cálculo de las frecuencias propias.

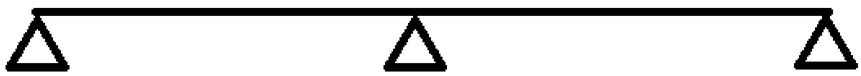


Imagen 1.3.1. Ejemplo de modelización de viga de 2 vanos con 3 apoyos simples.

Otro de los objetivos será el establecimiento de varios métodos de cálculo para obtener las frecuencias propias en los distintos ejemplos. Para ello se utilizará la herramienta de cálculo matemático ''Matlab'' ya que los cálculos necesarios para este proyecto serán demasiado largos y complicados para hacerlos a mano. Para ello utilizaremos distintas funciones de Matlab, como la función "Fzero", así como el método de bisección el cual se explicará más adelante y que será necesario para obtener las raíces de las funciones que se calcularán.

Los distintos ejemplos de los cuales se calcularán sus frecuencias propias serán la modelización de vigas continuas de uno y dos vanos a las cuales se les aplicarán diferentes condiciones de contorno en forma de diferentes apoyos para observar las frecuencias de cada una de ellas. Se calcularán las 4 primeras frecuencias propias de cada ejemplo de viga continua.

1.3. Contenido

Este proyecto constará de 4 partes las cuales se pueden diferenciar en introducción y objetivos, vibraciones en vigas continuas de un vano, vibraciones de vigas continuas de 2 vanos y unas conclusiones finales.

En la primera parte se expondrán diferentes ejemplos de vigas continuas así como los objetivos del proyecto y los diferentes modelos que se utilizarán. La segunda y la tercera parte serán similares con la diferencia en el tipo de vigas, pues en la segunda parte serán vigas de un vano y en la tercera parte serán vigas de 2 vanos. Estas 2 partes contienen la esencia del proyecto pues será donde se expongan los planteamientos iniciales y los cálculos matemáticos necesarios para obtener las frecuencias propias de vibración de los distintos ejemplos de vigas continuas, que es el objetivo principal del trabajo. Por último se expondrán las conclusiones que se puedan sacar una vez se conozcan los diferentes procedimientos y cálculos para obtener las frecuencias propias de los distintos ejemplos que se estudiarán.

2. Procedimiento de cálculo de frecuencias propias de vigas de un solo vano.

2.1. Planteamiento del problema.

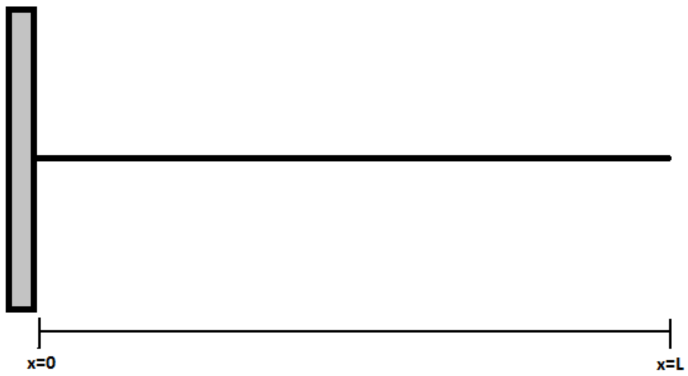


Imagen 2.1.1. Ejemplo de viga continua empotrada.

El objetivo es conocer las frecuencias propias en distintos ejemplos de viga continua, para ello se considerará una viga continua y elástica como la de la figura a la que se le aplicará una fuerza F(x,t), de sección constante "A" y longitud "L", conociendo su densidad "ρ". Utilizando el sistema de coordenadas de la figura, y haciendo uso de la suma de fuerzas de un elemento infinitesimal se obtiene:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(x,t) + \frac{\partial V}{\partial x} \qquad (1)$$

Siendo "V" el esfuerzo cortante que resulta de la aplicación de la fuerza "F" sobre la viga en función del tiempo "t" y de la distancia "x".

Así mismo se conoce que:

- $V = \frac{\partial M}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$ (2)

- $M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (3)

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2) se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \quad (4)$$

Y a su vez, se sustituye la ecuación (4) en la ecuación (1) obteniendo:

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = F(x,t) \quad (5)$$

De la ecuación (5), como se sabe que es una viga de sección constante, EI=cte y ρA=cte, por lo que la ecuación quedaría de la siguiente forma:

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x,t) \quad (6)$$

Debido a que se están estudiando vibraciones libres se sabe en este caso que F(x,t)=0 por lo que la ecuación (6) quedaría de la siguiente forma:

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (7)$$

En este caso “y” depende de “x” y de “t” por lo que el siguiente paso necesario para resolver esta ecuación será la separación de variables en términos que dependen de “x” y de “t” por separado:

$$y = \emptyset(x)q(t) \quad (8)$$

Sustituyendo la expresión (8) en la ecuación (7) y derivando según la variable que corresponda se obtiene:

- $\rho A\emptyset(x)\ddot{q}(t) + EI\emptyset^{IV}(x)q(t) = 0$ (9)

- $\dfrac{EI\emptyset^{IV}(x)}{\rho A\emptyset(x)} = -\dfrac{\ddot{q}(t)}{q(t)}$ (10)

La igualdad anterior (10) únicamente podría tener solución si ambos lados de la igualdad fueran igual a una constante ω:

$$\frac{EI\emptyset^{IV}(x)}{\rho A\emptyset(x)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \omega^2 \quad (11)$$

Se puede separar la igualdad anterior (11) ya que ambos lados de la igualdad dependen de variables distintas:

- $\dfrac{EI\emptyset^{IV}(x)}{\rho A\emptyset(x)} = \omega^2$ (12)

- $-\dfrac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \omega^2$ (13)

De la ecuación (13) se obtiene la siguiente igualdad:

$$\ddot{q}(t) + q(t)\omega^2 = 0 \quad (14)$$

La expresión (14) es una ecuación cuya solución es de la forma:

$$q(t) = Asen(\omega t) + Bcos(\omega t)$$

Donde “A” y “B” son constantes de integración que dependen de las condiciones de contorno.

Por otro lado, de la ecuación (12) se obtiene:

$$\emptyset^{IV}(x) - \frac{\rho A}{EI}\omega^2\emptyset(x) = 0 \quad (15)$$

A continuación se sustituye de la siguiente manera en la ecuación (15):

- $\beta^4 = \frac{\rho A L^4}{EI}\omega^2$ (16)
- $\xi = \frac{x}{L}$ (17)

$$\rightarrow \emptyset^{IV}(\xi) - \beta^4\emptyset(\xi) \quad (18)$$

Siendo “ω” la frecuencia propia buscada.

Al igual que en el paso anterior, la expresión (18) es una ecuación cuya solución tiene la siguiente forma:

$$\emptyset(\xi) = C_1 sen(\beta\xi) + C_2\cos(\beta\xi) + C_3 senh(\beta\xi) + C_4\cosh(\beta\xi) \quad (19)$$

Donde ξ=x/L y “C1”, “C2”, “C3” y “C4” son constantes de integración que dependen de las condiciones de contorno.

A partir de la ecuación (19) y las diferentes condiciones de contorno, obtendremos el valor de “β”, gracias al cual obtendremos el valor de la frecuencia propia de cada ejemplo a partir de la expresión (16), ya que como se ha dicho anteriormente los valores de “ρA” y “EI” son valores constantes y conocidos.

Una vez obtenida la ecuación (19) se debe conocer las relaciones entre deformada modal y variables físicas las cuales vienen dadas por:

$$\emptyset \rightarrow \text{Desplazamiento}$$

$$\frac{d\emptyset}{dx} \rightarrow \text{Giro de secciones}$$

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} \rightarrow \text{Momento flector}$$

$$\frac{d^3\emptyset}{dx^3} \rightarrow \text{Esfuerzo cortante}$$

Una vez que se apliquen las condiciones de contorno, según las relaciones anteriores, en la ecuación (18) obtendremos un sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas que serán C1, C2, C3, C4 y β las cuales se pueden representar de la siguiente manera:

$$[A(\beta)] \cdot \{C_{1-4}\} = \{0\}$$

La única manera de que el anterior sistema tenga solución es haciendo que el determinante de la matriz [A] sea igual a 0. Esta matriz depende de la variable "β", que es la variable necesaria para la obtención de las frecuencias propias, por lo que al igualar el determinante a 0 se obtendrá el valor de "β".

Para obtener las raíces de la ecuación resultante del determinante de [A] se utilizará el método de bisección y la función "fzero" a través de la herramienta de cálculo matemático "Matlab".

2.1.1. Método de Bisección.

Este método es un algoritmo de búsqueda de raíces el cual funciona dividiendo un intervalo a su mitad y a continuación seleccionar el subintervalo que contenga la raíz. El método se basa en que todas las funciones continuas "f" en un intervalo cerrado [a,c] toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(c). Por lo tanto en el caso de que f(a) y f(c) tuvieran signos opuestos, significaría que la función "f" toma el valor f(x)=0 en el punto "x" que está entre "a" y "c".

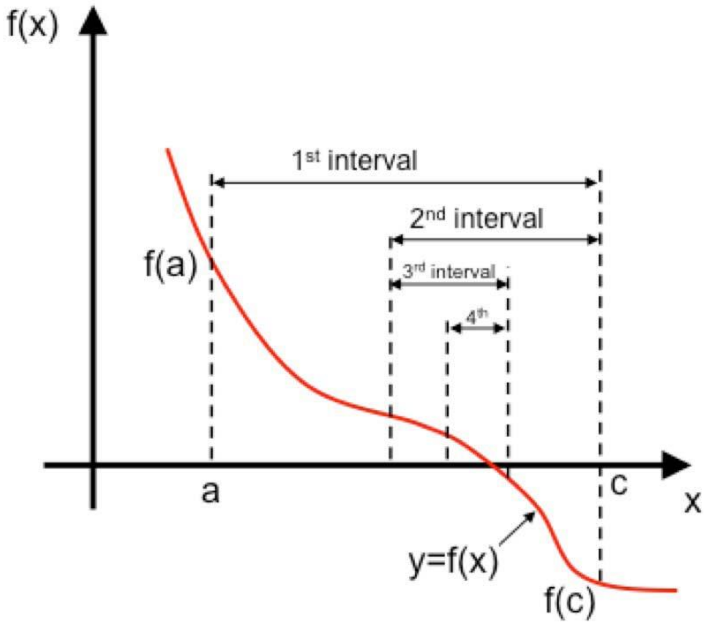


Imagen 2.1.1.1. Gráfica del método de bisección.

El método de bisección funciona de la siguiente manera:

- La función debe ser continua en el intervalo [a,c].
- Se debe cumplir que f(a) · f(c)<0.
- Se calcula el punto medio "x" entre [a,c].
- Se evalúa f(x). Si es igual a 0 se ha encontrado la raíz, si no, se comprueba si tiene signo opuesto con f(a) o f(c).
- Se redefine el intervalo como [a,x] o [x,c], según con qué punto se haya encontrado un cambio de signo.
- Continuar con el método hasta encontrar la raíz o un valor f(x) menor a una tolerancia establecida.

Para utilizar el método de bisección en Matlab se utilizará el programa de Matlab del Anexo 1, en el cual se buscan las 4 primeras raíces de la función del determinante de [A]. El programa busca las raíces dando unos valores iniciales "x1" y "x2" siendo el punto medio "x" que es el valor de "β". En el programa se llama "x" a "β" para facilitar la sintaxis en Matlab.

2.2. Procedimiento de cálculo de frecuencias propias de vigas continuas de un vano con diferentes condiciones de contorno.

Antes de comenzar con los cálculos conviene recordar las relaciones entre deformada modal y variables físicas:

$$\emptyset \rightarrow \text{Desplazamiento}$$

$$\frac{d\emptyset}{dx} \rightarrow \text{Giro de secciones}$$

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} \rightarrow \text{Momento flector}$$

$$\frac{d^3\emptyset}{dx^3} \rightarrow \text{Esfuerzo cortante}$$

Por tanto, se necesitará la ecuación (19) del apartado anterior además de sus 3 primeras derivadas, las cuales se muestran a continuación:

$$\emptyset(\xi) = C_1 sen(\beta\xi) + C_2\, cos(\beta\xi) + C_3 senh(\beta\xi) + C_4 cosh(\beta\xi)$$

$$\emptyset'(\xi) = C_1\beta cos(\beta\xi) - C_2\beta\, sen(\beta\xi) + C_3\beta cosh(\beta\xi) + C_4\beta senh(\beta\xi)$$

$$\begin{aligned}\emptyset''(\xi) = {} & -C_1\beta^2 sen(\beta\xi) - C_2\beta^2\, cos(\beta\xi) + C_3\beta^2 senh(\beta\xi) \\ & + C_4\beta^2 cosh(\beta\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\emptyset'''(\xi) = {} & -C_1\beta^3 cos(\beta\xi) + C_2\beta^3\, sen(\beta\xi) + C_3\beta^3 cosh(\beta\xi) \\ & + C_4\beta^3 senh(\beta\xi)\end{aligned}$$

Además se debe recordar que:

$$\omega = \frac{\beta^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Siendo “ω” la frecuencia propia buscada y “L”, EI y ρA valores constantes y conocidos debido a que la sección de la viga es constante.

2.2.1. <u>Procedimiento de cálculo en una viga biapoyada de un vano.</u>

Imagen 2.2.1.1. Viga biapoyada.

Aplicando las condiciones de contorno en los apoyos de esta viga se obtendrá:

- Desplazamiento nulo en x/L=0: $\emptyset(0) = 0$;
- Momento nulo en x/L=0: $\emptyset''(0) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=1: $\emptyset(1) = 0$;
- Momento nulo en x/L=1: $\emptyset''(1) = 0$;

A partir de las condiciones de contorno anteriores se obtendrá el siguiente sistema de 4 ecuaciones:

1. $C_2+C_4=0$;
2. $-C_2\beta^2+C_4\beta^2=0$;
3. $C_1 sen(\beta)+C_2\cos(\beta)+C_3 senh(\beta)+C_4\cosh(\beta)=0$;
4. $-C_1\, \beta^2 sen(\beta)-C_2\, \beta^2\cos(\beta)+C_3\, \beta^2 senh(\beta)+C_4\, \beta^2\cosh(\beta)=0$;

El sistema de ecuaciones anterior se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta^2 & 0 & -\beta^2 \\ sen(\beta) & cos(\beta) & senh(\beta) & cosh(\beta) \\ -\beta^2 sen(\beta) & -\beta^2 cos(\beta) & \beta^2 senh(\beta) & \beta^2 \cosh(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Siendo [A] una matriz que depende de "β", cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se igualará el determinante de [A] a 0 para obtener el valor de "β", siendo su solución la siguiente:

```
% En Matlab se usarán x en lugar de beta para simplificar la
sintaxis

>> syms x;

A=[0,1,0,1;0,-x^2,0,x^2;sin(x),cos(x),sinh(x),cosh(x);-
x^2*sin(x),-x^2*cos(x),x^2*sinh(x),x^2*cosh(x)]

 A =

 [            0,            1,            0,            1]

[            0,         -x^2,            0,          x^2]

[       sin(x),       cos(x),      sinh(x),      cosh(x)]

[ -x^2*sin(x), -x^2*cos(x), x^2*sinh(x), x^2*cosh(x)]

 det(A)

 ans =

 -4*x^4*sin(x)*sinh(x)
```

$$f(\beta) = -4x^4 \mathrm{sen}(\beta) senh(\beta) = 0$$

En este caso para obtener las raíces bastaría con igualar únicamente el seno de beta a 0, ya que los otros términos de la ecuación son crecientes y constantes:

$$\mathrm{sen}(\beta) = 0$$

Utilizando el programa en Matlab se obtendrán las siguientes raíces:

```
%Inicialmente se define el programa indicando la función a evaluar, el intervalo de puntos en el que buscar y la tolerancia requerida.

biseccion('sin(x)',1,2,0.001)

x =

    3.1410

x =

    6.2830

x =

    9.4240

x =

   12.5660
```

A continuación se mostrará la gráfica de la función evaluada para verificar que las raíces obtenidas son correctas.

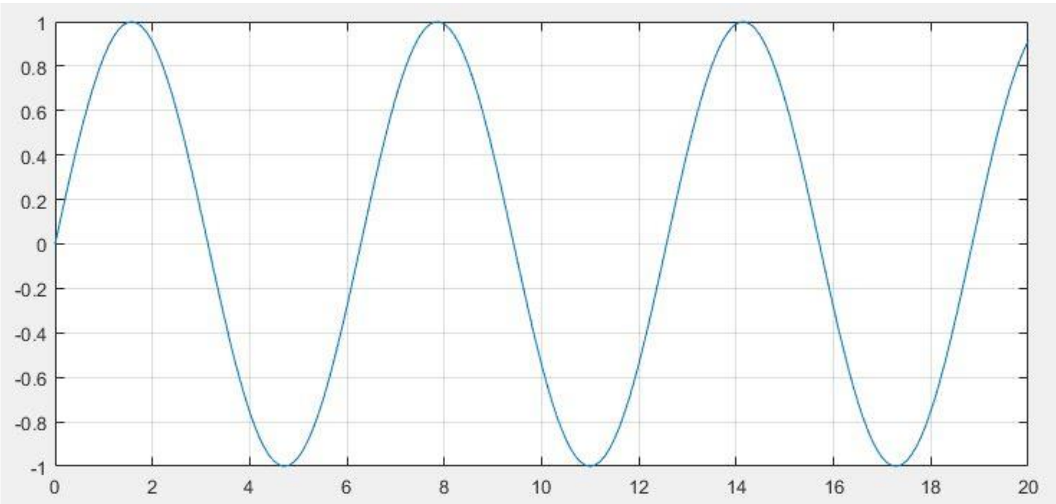


Imagen 2.2.1.2. Gráfica de la función sen(β).

Como se puede observar en la imagen anterior, las raíces obtenidas con el programa en Matlab coinciden con los puntos de corte en el eje x de la función evaluada.

2.2.2. Procedimiento de cálculo en una viga en voladizo.

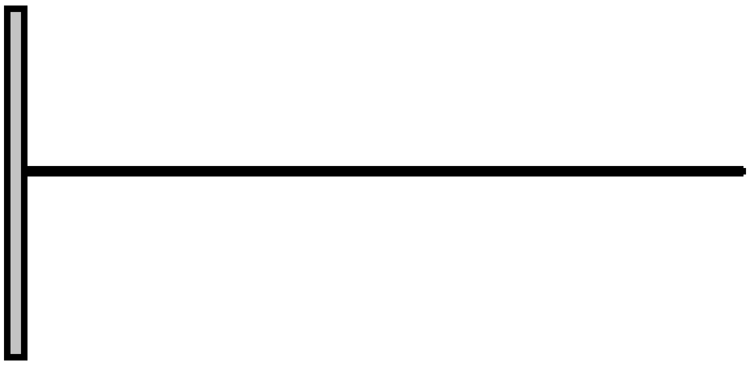


Imagen 2.2.2.1. Viga en voladizo.

Aplicando las condiciones de contorno según los apoyos de esta viga se obtendrá:

- Desplazamiento nulo en x/L=0: $\emptyset(0) = 0$;
- Giro nulo en x/L=0: $\emptyset'(0) = 0$;
- Momento flector nulo en x/L=1: $\emptyset''(1) = 0$;
- Esfuerzo cortante nulo en x/L=1: $\emptyset'''(1) = 0$;

A partir de las condiciones de contorno anteriores se obtendrá el siguiente sistema de 4 ecuaciones:

1. $C_2+C_4=0$;
2. $C_1\beta+C_3\,\beta=0$;
3. $-C_1\,\beta^2 sen(\beta)-C_2\,\beta^2 cos(\beta)+C_3\,\beta^2 senh(\beta)+C_4\,\beta^2 cosh(\beta)=0$;
4. $-C_1\,\beta^3 cos(\beta)+C_2\,\beta^3 sen(\beta)+C_3\,\beta^3 cosh(\beta)+C_4\,\beta^3 senh(\beta)=0$;

El anterior sistema de ecuaciones se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ -\beta^2 sen(\beta) & -\beta^2 cos(\beta) & \beta^2 senh(\beta) & \beta^2 cosh(\beta) \\ -\beta^3 cos(\beta) & \beta^3\, sen(\beta) & \beta^3 cosh(\beta) & \beta^3 \mathrm{senh}(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Siendo [A] una matriz que depende de "β", cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se igualará el determinante de [A] a 0 para obtener el valor de "β", siendo su solución la siguiente:

```
% En Matlab se usarán x en lugar de beta para simplificar la
sintaxis

syms x;

A=[0,1,0,1;x,0,x,0;-x^2*sin(x),-
x^2*cos(x),x^2*sinh(x),x^2*cosh(x);-
x^3*cos(x),x^3*sin(x),x^3*cosh(x),x^3*sinh(x)]

 A =

 [           0,           1,           0,           1]

[           x,           0,           x,           0]

[ -x^2*sin(x), -x^2*cos(x), x^2*sinh(x), x^2*cosh(x)]

[ -x^3*cos(x),  x^3*sin(x), x^3*cosh(x), x^3*sinh(x)]

 >> det(A)

 ans =

 x^6*(2*cos(x)*cosh(x) + cos(x)^2 + cosh(x)^2 + sin(x)^2 -
sinh(x)^2)
```

Lo que simplificando es igual a:

$$f(\beta) = 2\beta^6(1 + \cos(\beta)\cosh(\beta)) = 0$$

En este caso bastará con evaluar la parte de dentro del paréntesis.

Utilizando el programa en Matlab se obtendrán las siguientes raíces:

```
% Inicialmente se define el programa indicando la función a
evaluar, el intervalo de puntos en el que buscar y la tolerancia
requerida.

>> biseccion('1+cos(x)*cosh(x)',1,2,0.001)

x =

    1.8750

x =

    4.6941

x =

    7.8548

x =

   10.9955
```

A continuación se mostrará la gráfica de la función evaluada para verificar que las raíces obtenidas son correctas.

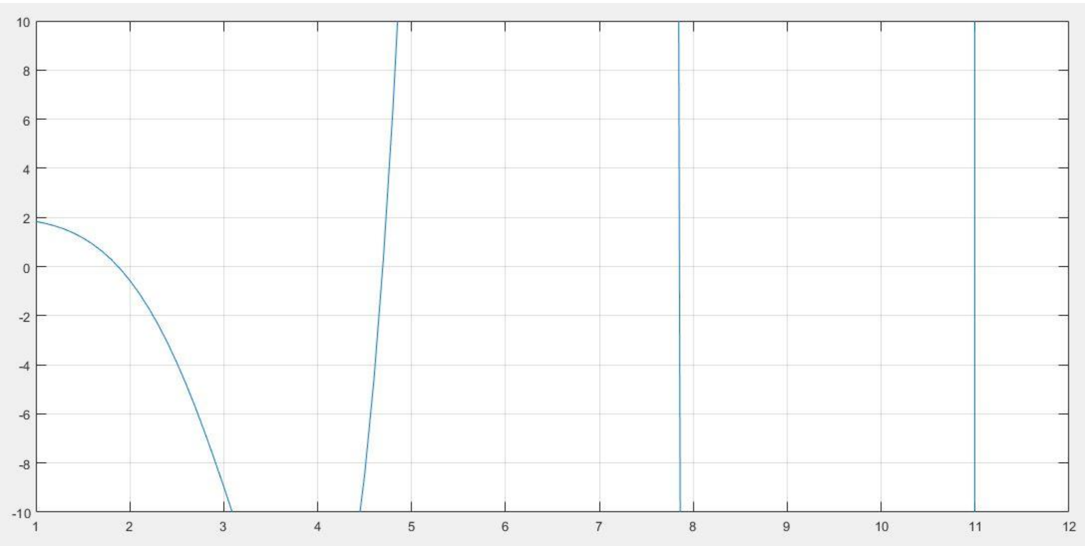


Imagen 2.2.2.2. Gráfica de la función 1+cos(x)cosh(x).

Debido a que la función toma valores muy altos en el eje y se ha acotado entre 10 y -10, aun así, como se puede observar en la imagen anterior las raíces obtenidas con el programa en Matlab coinciden con los puntos de corte en el eje x de la función evaluada.

2.2.3. Procedimiento de cálculo en una viga empotrada y simplemente apoyada en su extremo libre.

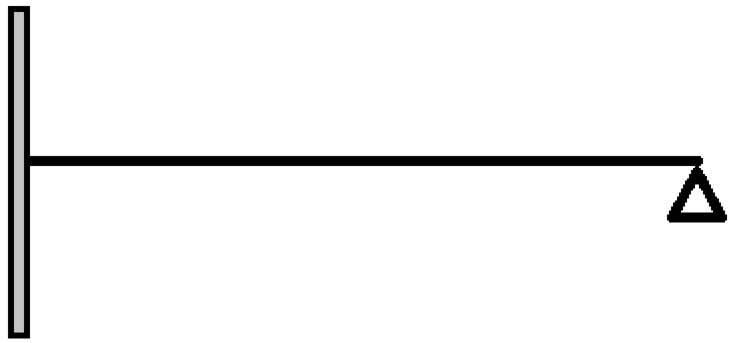


Imagen 2.2.3.1. Viga empotrada y simplemente apoyada.

Aplicando las condiciones de contorno en los apoyos de esta viga se obtiene:

- Desplazamiento nulo en x/L=0: $\emptyset(0) = 0;$
- Giro nulo en x/L=0: $\emptyset'^{(0)} = 0;$
- Desplazamiento nulo en x/L=1: $\emptyset(1) = 0;$
- Momento flector nulo en x/L=1: $\emptyset''(1) = 0;$

A partir de las anteriores condiciones de contorno se obtendrá el siguiente sistema de 4 ecuaciones:

1. $C_2+C_4=0;$
2. $\beta C_1+ \beta C_3=0;$
3. $C_1 sen(\beta)+C_2 cos(\beta)+C_3 senh(\beta)+C_4 cosh(\beta)=0;$
4. $-C_1 \beta^2 sen(\beta)-C_2 \beta^2 cos(\beta)+C_3 \beta^2 senh(\beta)+C_4 \beta^2 cosh(\beta)=0;$

Es posible representar el anterior sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ sen(\beta) & cos(\beta) & senh(\beta) & cosh(\beta) \\ -\beta^2 sen(\beta) & -\beta^2 cos(\beta) & \beta^2 senh(\beta) & \beta^2 cosh(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Siendo [A] una matriz que depende de "β", cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se igualará el determinante de [A] a 0 para obtener el valor de "β", siendo su solución la siguiente:

```
% En Matlab se usarán x en lugar de beta para simplificar la
sintaxis

>> syms x;

>> A=[0,1,0,1;x,0,x,0;sin(x),cos(x),sinh(x),cosh(x);-
x^2*sin(x),-x^2*cos(x),x^2*sinh(x),x^2*cosh(x)]

 A =

 [            0,            1,            0,            1]

[            x,            0,            x,            0]

[       sin(x),       cos(x),      sinh(x),      cosh(x)]

[ -x^2*sin(x), -x^2*cos(x), x^2*sinh(x), x^2*cosh(x)]

 >> det(A)

 ans =

 -2*x^3*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x))
```

$$f(\beta) = -2x^3(\cos(\beta)\, senh(\beta) - \cosh(\beta)\, sen(\beta)) = 0$$

En este caso bastará con evaluar la parte de dentro del paréntesis.

Utilizando el programa en Matlab se obtendrán las siguientes raíces:

```
% Inicialmente se define el programa indicando la función a
evaluar, el intervalo de puntos en el que buscar y la tolerancia
requerida.

>> biseccion('cos(x)*sinh(x)-cosh(x)*sin(x)',1,2,0.001)

x =

    3.9266

x =

    7.0686

x =

   10.2102

x =

   13.3518
```

A continuación se muestra la gráfica de la función evaluada para verificar si son correctos los valores obtenidos:

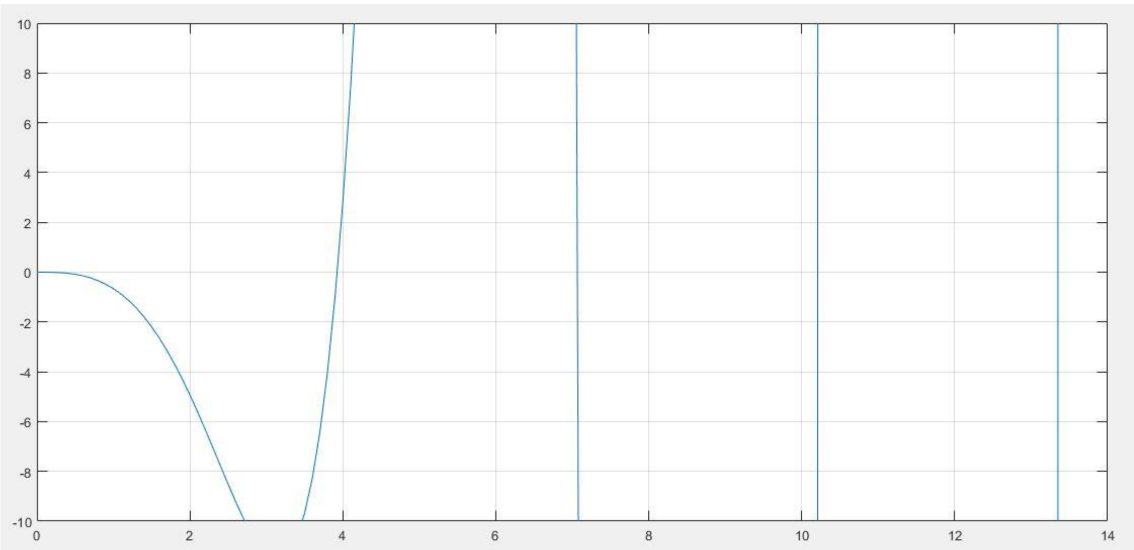


Imagen 2.2.3.2. Gráfica de la función cos(x)*sinh(x)-sin(x)*cosh(x).

Al igual que en el ejemplo anterior, la función toma valores muy altos en el eje y, por lo que se ha acotado dicho eje entre -10 y 10. Según se observa en la imagen los valores de “β” obtenidos con el programa en Matlab coinciden con las raíces de la gráfica de la función evaluada.

2.2.4. Procedimiento de cálculo en una viga biempotrada.

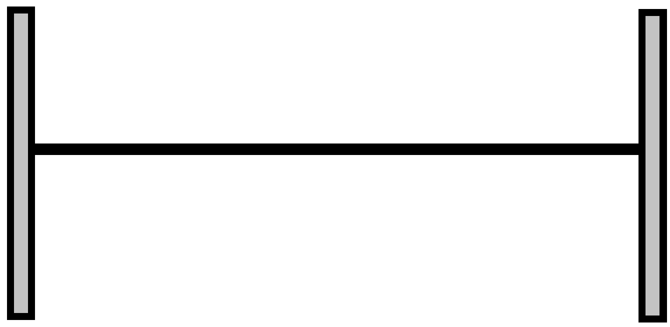


Imagen 2.2.4.1. Viga biempotrada.

Aplicando las condiciones de contorno según los apoyos de la viga se obtiene:

- Desplazamiento nulo en x/L=0: $\emptyset(0) = 0;$
- Giro nulo en x/L=0: $\emptyset'(0) = 0;$
- Desplazamiento nulo en x/L=1: $\emptyset(1) = 0;$
- Giro nulo en x/L=1: $\emptyset'(1) = 0;$

A partir de las anteriores condiciones de contorno se obtiene el siguiente sistema de 4 ecuaciones:

1. $C_2+C_4=0;$
2. $C_1\beta+C_3\beta=0;$
3. $C_1 sen(\beta)+C_2 cos(\beta)+C_3 senh(\beta)+C_4 cosh(\beta)=0;$
4. $C_1 \beta cos(\beta)-C_2 \beta sen(\beta)+C_3 \beta cosh(\beta)+C_4 \beta senh(\beta)=0;$

El anterior sistema de ecuaciones se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ sen(\beta) & cos(\beta) & senh(\beta) & cosh(\beta) \\ \beta cos(\beta) & -\beta sen(\beta) & \beta cosh(\beta) & \beta senh(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Siendo [A] una matriz que depende de "β", cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se igualará el determinante de [A] a 0 para obtener el valor de "β", siendo su solución la siguiente:

```
% En Matlab se usarán x en lugar de beta para simplificar la
sintaxis

>> syms x;

>> A=[0,1,0,1;x,0,x,0;sin(x),cos(x),sinh(x),cosh(x);x*cos(x),-
x*sin(x),x*cosh(x),x*sinh(x)]


A =

 [        0,          1,          0,          1]

[        x,          0,          x,          0]

[   sin(x),     cos(x),    sinh(x),    cosh(x)]

[ x*cos(x), -x*sin(x), x*cosh(x), x*sinh(x)]


>> det(A)

 ans =

 x^2*(cos(x)^2 - 2*cos(x)*cosh(x) + cosh(x)^2 + sin(x)^2 -
sinh(x)^2)
```

Si se simplifica la expresión anterior se obtendrá la siguiente función:

$$f(\beta) = 2x^2(1 - \cos(\beta)\cosh(\beta)) = 0$$

En este caso bastará con evaluar la parte de dentro del paréntesis.

Utilizando el programa en Matlab se obtendrán las siguientes raíces:

```
% Inicialmente se define el programa indicando la función a
evaluar, el intervalo de puntos en el que buscar y la tolerancia
requerida.

>> biseccion('1-cos(x)*cosh(x)',1,2,0.001)

x =

    4.7300

x =

    7.8532

x =

   10.9956


x =

   14.1372
```

Seguidamente se mostrará la gráfica de la función evaluada para comprobar que los valores de "β" obtenidos son correctos:

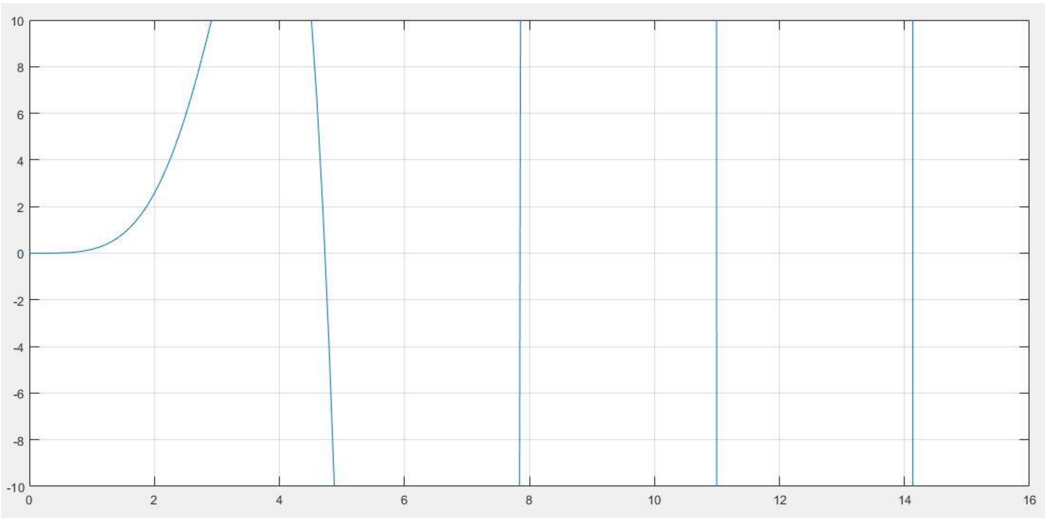


Imagen 2.2.4.2. Gráfica de la función 1-cos(β)cosh(β).

Al igual que en los 2 casos anteriores, la función toma valores muy altos en el eje y, por lo que se ha acotado entre los valores -10 y 10. Se puede observar que los valores de “β” obtenidos en el programa de Matlab coinciden con los puntos de corte de la gráfica con el eje x.

En la siguiente tabla se sintetizarán todos los valores de “β” obtenidos para los dinstintos ejemplos de vigas analizados:

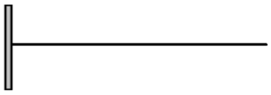
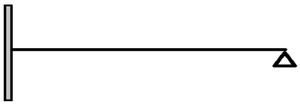
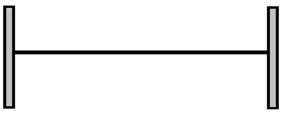
Ejemplo/valor de “β”	1º	2º	3º	4º
	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664
	1.8751	4.6941	7.8548	10.9955
	3.9266	7.0686	10.2102	13.3518
	4.73	7.8532	10.9956	14.1372

Tabla 2.2.1. Valores de “β” obtenidos en vigas de un vano.

3. Procedimiento de cálculo de frecuencias propias en vigas de 2 vanos.

3.1. Planteamiento del problema y formulación del método de solución.

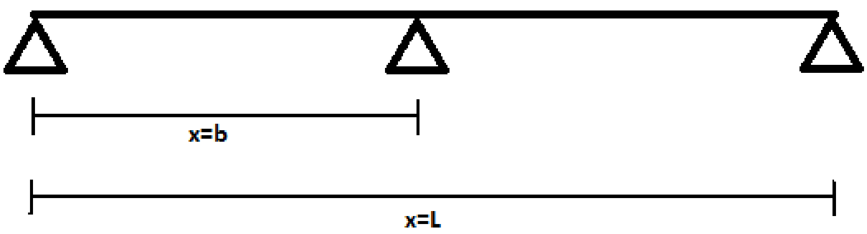


Imagen 3.1.1. Ejemplo de viga continua con 3 apoyos simples.

En este caso el objetivo será el mismo que el del apartado anterior, con la salvedad de que en este apartado las vigas serán de 2 vanos, es decir, vigas de varios tramos con 2 o 3 apoyos a lo largo de su longitud. Pueden tener 2 o 3 apoyos, ya que uno de los 2 extremos puede estar libre pero al tener un apoyo en el extremo opuesto y otro apoyo en algún punto de la viga será de 2 vanos. Tendrán 2 apoyos en el caso de que un extremo esté libre. Al igual que en el apartado anterior se estudiarán vigas de sección continua por lo que “L”, “EI”, “A” y “ρ” serán valores constantes y conocidos.

Para que se traten de vigas de 2 vanos se debe tener un apoyo en algún punto a lo largo de la viga. Dicho punto estará a una distancia “b”, la cual será definida al principio de cada ejemplo y variará para obtener las frecuencias propias de la viga según varios puntos x=b.

Los cálculos matemáticos para este apartado serán los mismos que los del apartado anterior hasta la parte en la que se obtiene la ecuación necesaria para la obtención de “β”:

$$\emptyset(\xi) = C_1 sen(\beta\xi) + C_2 \cos(\beta\xi) + C_3 senh(\beta\xi) + C_4 cosh(\beta\xi)$$

Al tratarse de vigas de 2 vanos, la ecuación anterior se debe usar para ambos tramos de dicha viga quedando de la siguiente manera:

$$\emptyset_1(\xi) = C_1 sen(\beta\xi) + C_2 \cos(\beta\xi) + C_3 senh(\beta\xi) + C_4 cosh(\beta\xi)$$

$$\emptyset_2(\xi) = C_5 sen(\beta\xi) + C_6 \cos(\beta\xi) + C_7 senh(\beta\xi) + C_8 cosh(\beta\xi)$$

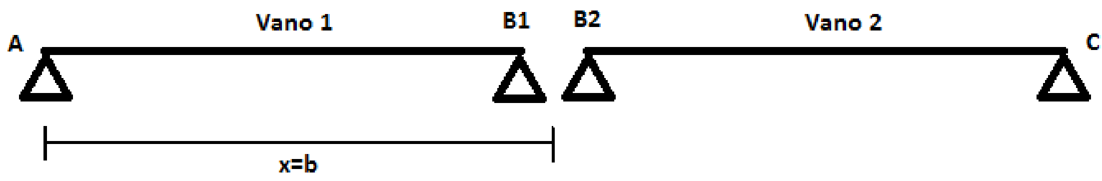


Imagen 3.1.2. Viga de 2 vanos separada en 2 vigas de un vano.

En los casos de vigas de un vano, una vez que se aplicaban las condiciones de contorno se obtenía un sistema de 4 ecuaciones, 2 ecuaciones por cada apoyo. En este caso de vigas de 2 vanos es similar pero, como se muestra en la imagen anterior, ahora se tiene una viga con 2 o 3 apoyos, por lo que la podemos separar en 2 vigas. Por lo tanto, en este caso se obtendrá un sistema de 8 ecuaciones que dependerán de 8 constantes de integración, que a su vez dependen de las condiciones de contorno, además de "b" que se fijará al inicio del problema, y de "β", al igual que en el apartado anterior. Dicho sistema de ecuaciones quedará de la siguiente manera:

$$[A(\beta)] \cdot \{C_{1-8}\} = \{0\}$$

Al igual que en las vigas de un vano, el objetivo será obtener el valor de "β" para cada valor de "b" para después calcular las frecuencias propias según las características de la viga a estudiar.

Una vez se haya obtenido la matriz de 8 ecuaciones el siguiente paso será igualar su determinante a 0, al igual que en apartado anterior, para después obtener los valores de la incógnita "β".

Debido a que la solución del determinante de la matriz de 8x8 será una ecuación demasiado extensa y compleja, en este apartado no se utilizará el programa de Matlab del anterior apartado, pues dicho programa tardaría más en dar las soluciones. Además se ha querido utilizar otro método de cálculo de raíces para tener varios métodos de resolución del problema.

Para calculas las raíces de las funciones obtenidas a través del cálculo del determinante se utilizará la función de Matlab "fzero". Dicha función es una función de Matlab capaz de calcular las raíces de una función f(x)=0 cuyas sintaxis son las siguientes:

$$fzero(función, [a, b])$$

$$fzero(función, x_0)$$

Donde “función” representa la función a evaluar, [a,b] es el intervalo en el que fzero busca la raíz de la función y x_0 es un valor cercano a la raíz de la función, a partir del cual la función fzero buscará hasta encontrar la raíz, es decir, la primera aproximación a la raíz.

Una vez se haya obtenido el determinante de la matriz se tendrá una ecuación que dependerá de 2 variables que son “β” y “b”, siendo “β” la incógnita buscada y “b” la posición del apoyo a lo largo de la viga. La función fzero busca raíces de funciones de una variable por lo que antes de buscar las raíces se declarará una función anónima dependiente de “b” para después evaluarla en las distintas posiciones de “b” que se quieran estudiar, quedando así una función que depende únicamente de “β”.

En el Anexo 2 se mostrará un ejemplo sencillo del método de resolución de este apartado.

3.2. Procedimiento de cálculo de frecuencias propias de vigas continuas de dos vanos con diferentes condiciones de contorno.

Para este apartado se calcularán las 4 primeras frecuencias propias en vigas continuas de 2 vanos. Para ello el apoyo central estará colocado a diferentes distancias siendo estas x/L=0.2, x/L=0.5 y x/L=0.8.

A la hora de utilizar Matlab la variable “β” será representada en Matlab por la variable “x” para simplificar la sintaxis en el programa.

Como ya se sabe los sistemas de ecuaciones en este apartado tendrán la siguiente forma:

$$[A(\beta)] \cdot \{C_{1-8}\} = \{0\}$$

3.2.1. Procedimiento de cálculo en una viga con 3 apoyos simples.

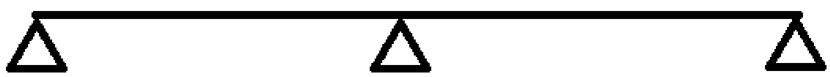


Imagen 3.2.1.1. Viga con 3 apoyos simples.

Aplicando las condiciones de contorno según los apoyos de esta viga se obtienen las siguientes ecuaciones:

- Desplazamiento nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset_1(0) = 0$;
- Momento flector nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset''_1(0) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 1): $\emptyset_1(\mathrm{b}) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 2): $\emptyset_2(\mathrm{b}) = 0$;
- Giro en x/L=b del vano 1 igual al giro en x/L=b del vano 2: $\emptyset'_1(\mathrm{b}) = \emptyset'_2(\mathrm{b})$;
- Momento en x/L=b del vano 1 igual al momento en x/L=b del vano 2: $\emptyset''_1(\mathrm{b}) = \emptyset''_2(\mathrm{b})$;
- Desplazamiento nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset_2(1) = 0$;
- Momento flector nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset''_2(1) = 0$;

A partir de las anteriores condiciones de contorno se obtiene el siguiente sistema de 8 ecuaciones:

1. $C_2 + C_4 = 0$;
2. $-C_2\beta^2 + C_4\beta^2 = 0$;
3. $C_1 sen(\beta b) + C_2 \cos(\beta b) + C_3 senh(\beta b) + C_4 \cosh(\beta b) = 0$;
4. $C_5 sen(\beta b) + C_6 \cos(\beta b) + C_7 senh(\beta b) + C_8 \cosh(\beta b) = 0$;
5. $C_1\beta \cos(\beta b) - C_2\beta sen(\beta b) + C_3\beta \cosh(\beta b) + C_4\beta senh(\beta b) - C_5\beta \cos(\beta b) + C_6\beta sen(\beta b) - C_7\beta \cos h(\beta b) - C_8\beta senh(\beta b) = 0$;
6. $-C_1\beta^2 sen(\beta b) - C_2\beta^2 \cos(\beta b) + C_3\beta^2 senh(\beta b) + C_4\beta^2 \cosh(\beta b) + C_5\beta^2 sen(\beta b) + C_6\beta^2 \cos(\beta b) - C_7\beta^2 senh(\beta b) - C_8\beta^2 \cosh(\beta b) = 0$;
7. $C_5 sen(\beta) + C_6 \cos(\beta) + C_7 senh(\beta) + C_8 \cosh(\beta) = 0$;
8. $-C_5\beta^2 sen(\beta) - C_6\beta^2 \cos(\beta) + C_7\beta^2 senh(\beta) + C_8\beta^2 \cosh(\beta) = 0$;

La matriz del sistema de ecuaciones anterior se puede representar de la siguiente forma:

```
A =

[            0,            1,            0,            1,            0,            0,             0,             0]
[            0,         -x^2,            0,          x^2,            0,            0,             0,             0]
[   sin(b*x),     cos(b*x),    sinh(b*x),    cosh(b*x),            0,            0,             0,             0]
[            0,            0,            0,            0,     sin(b*x),     cos(b*x),     sinh(b*x),     cosh(b*x)]
[   x*cos(b*x),  -x*sin(b*x),  x*cosh(b*x),  x*sinh(b*x),  -x*cos(b*x),   x*sin(b*x),  -x*cosh(b*x),  -x*sinh(b*x)]
[ -x^2*sin(b*x), -x^2*cos(b*x), x^2*sinh(b*x), x^2*cosh(b*x), x^2*sin(b*x), x^2*cos(b*x), -x^2*sinh(b*x), -x^2*cosh(b*x)]
[            0,            0,            0,            0,       sin(x),       cos(x),       sinh(x),       cosh(x)]
[            0,            0,            0,            0,  -x^2*sin(x),  -x^2*cos(x),    x^2*sinh(x),    x^2*cosh(x)]
```

Imagen 3.2.1.2. Matriz [A] del sistema de ecuaciones representada en Matlab.

Siendo [A] una matriz que depende de “β”, donde “x” representa el valor “β” para simplificar la sintaxis en Matlab, cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se obtendrá el determinante de [A] para más tarde evaluarlo en función de “b” siendo su solución la siguiente:

```
>> det(A)

 ans =

 8*x^7*(cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
sin(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
sin(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x))

>> % Se simplifica el resultado del determinante de la matriz

>>simplify(8*x^7*(cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
sin(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
sin(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)))

 ans =

 -4*x^7*(cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x) - cos(x*(2*b -
1))*sinh(x) - cosh(x*(2*b - 1))*sin(x))
```

Una vez obtenido el determinante de la matriz se calcularán las raíces de la función obtenida en función de los diferentes valores de “b”, es decir, 0.2, 0.5 y 0.8. Para ello se declarará una función anónima dependiente de “b” para después evaluarla con los diferentes valores.

```
% Se declara la función anónima dependiente de b con el
resultado del determinante

>> f=@(b)-4*x^7*(cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x) - cos(x*(2*b -
1))*sinh(x) - cosh(x*(2*b - 1))*sin(x));
```

```
>> % RAICES CUANDO b=0.2

>> % Se evalúa la función en b=0.2

>> f(0.2)

 ans =

-4*x^7*(cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x) - cos((3*x)/5)*sinh(x) -
cosh((3*x)/5)*sin(x))

>> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x)-4*x^7*(cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x) -
cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    4.6183

>> fzero(g,7)

ans =

    8.3915

>> fzero(g,11)

ans =

   12.1617

>> fzero(g,15)

ans =

   15.7080

>> RAICES CUANDO b=0.5

>> Se evalúa la función en 0.5

>> f(0.5)

 Ans =

4*x^7*(sin(x) + sinh(x) - cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x))

>> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior
```

```
>> g=@(x)4*x^7*(sin(x) + sinh(x) - cos(x)*sinh(x) -
cosh(x)*sin(x));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,2)

ans =

    6.2832

>> fzero(g,8)

ans =

    7.8532

>> fzero(g,12)

ans =

   12.5664

>> fzero(g,14)

ans =

   14.1372

>> % RAICES CUANDO b=0.8

>> % Se evalúa la función en 0.8

>> f(0.8)

 ans =

-4*x^7*(cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x) - cos((3*x)/5)*sinh(x) -
cosh((3*x)/5)*sin(x))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x) -4*x^7*(cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x) -
cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    4.6183

>> fzero(g,7)
```

```
ans =

    8.3915

>> fzero(g,11)

ans =

   12.1617

>> fzero(g,15)

ans =

   15.7080
```

3.2.2. Procedimiento de cálculo en una viga con dos apoyos simples y un extremo libre.

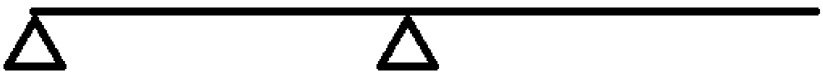


Imagen 3.2.2.1. Viga con 2 apoyos simples y un extremo libre.

Aplicando las pertinentes condiciones de contorno según los apoyos de esta viga se obtienen las siguientes ecuaciones:

- Desplazamiento nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset_1(0) = 0$;
- Momento flector nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset''_1(0) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 1): $\emptyset_1(\mathrm{b}) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 2): $\emptyset_2(\mathrm{b}) = 0$;
- Giro en x/L=b del vano 1 igual al giro en x/L=b del vano 2: $\emptyset'_1(\mathrm{b}) = \emptyset'_2(\mathrm{b})$;
- Momento en x/L=b del vano 1 igual al momento en x/L=b del vano 2: $\emptyset''_1(\mathrm{b}) = \emptyset''_2(\mathrm{b})$;
- Momento flector nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset''_2(1) = 0$;
- Esfuerzo cortante nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset'''_2(1) = 0$;

A partir de las anteriores condiciones se obtiene el siguiente sistema de 8 ecuaciones:

1. $C_2 + C_4 = 0;$
2. $-C_2\beta^2 + C_4\beta^2 = 0;$
3. $C_1 sen(\beta b) + C_2 \cos(\beta b) + C_3 senh(\beta b) + C_4 \cosh(\beta b) = 0\,;$
4. $C_5 sen(\beta b) + C_6 \cos(\beta b) + C_7 senh(\beta b) + C_8 \cosh(\beta b) = 0;$
5. $C_1\beta \cos(\beta b) - C_2\beta sen(\beta b) + C_3\beta \cosh(\beta b) + C_4\beta senh(\beta b) -$
   $C_5\beta \cos(\beta b) + C_6\beta sen(\beta b) - C_7\beta \cos h(\beta b) - C_8\beta senh(\beta b) = 0;$
6. $-C_1\beta^2 sen(\beta b) - C_2\beta^2 \cos(\beta b) + C_3\beta^2 senh(\beta b) + C_4\beta^2 \cosh(\beta b) +$
   $C_5\beta^2 sen(\beta b) + C_6\beta^2 \cos(\beta b) - C_7\beta^2 senh(\beta b) - C_8\beta^2 \cosh(\beta b) = 0;$
7. $-C_5\beta^2 sen(\beta) - C_6\beta^2 \cos(\beta) + C_7\beta^2 senh(\beta) + C_8\beta^2 \cosh(\beta) = 0;$
8. $-C^5\beta^3 \cos(\beta) + C_6\beta^3 sen(\beta) + C_7\beta^3 \cosh(\beta) + C_8\beta^3 senh(\beta) = 0;$

La matriz del sistema de ecuaciones anterior se puede representar de la siguiente forma:

```
B =

[             0,             1,             0,             1,             0,             0,              0,              0]
[             0,         -x^2,             0,          x^2,             0,             0,              0,              0]
[     sin(b*x),     cos(b*x),     sinh(b*x),     cosh(b*x),             0,             0,              0,              0]
[             0,             0,             0,             0,      sin(b*x),      cos(b*x),      sinh(b*x),      cosh(b*x)]
[   x*cos(b*x),  -x*sin(b*x),   x*cosh(b*x),   x*sinh(b*x),   -x*cos(b*x),    x*sin(b*x),   -x*cosh(b*x),   -x*sinh(b*x)]
[ -x^2*sin(b*x), -x^2*cos(b*x), x^2*sinh(b*x), x^2*cosh(b*x), x^2*sin(b*x), x^2*cos(b*x), -x^2*sinh(b*x), -x^2*cosh(b*x)]
[             0,             0,             0,             0,   -x^2*sin(x),   -x^2*cos(x),     x^2*sinh(x),     x^2*cosh(x)]
[             0,             0,             0,             0,   -x^3*cos(x),    x^3*sin(x),     x^3*cosh(x),     x^3*sinh(x)]
```

Imagen 3.2.2.2. Matriz [B] del sistema de ecuaciones representada en Matlab.

Siendo [B] una matriz que depende de "β", donde "x" representa el valor "β" para simplificar la sintaxis en Matlab, cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se obtendrá el determinante de [B] para más tarde evaluarlo en función de "b" siendo su solución la siguiente:

```
>> det(B)

 ans =

 4*x^10*(sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)^2 -
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)^2 - sin(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)^2 -
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*sinh(x)^2 -
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*sinh(x)^2 +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)^2 +
cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cos(x)*cosh(x) -
```

```
cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) -
2*sin(b*x)^2*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)^2 +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)^2 +
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*cos(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) -
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x))
```

```
>> % Debido a la complejidad del determinante se simplifica
dicha expresión
```

```
>> simplify(4*x^10*(sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)^2 -
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)^2 - sin(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)^2 -
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*sinh(x)^2 -
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*sinh(x)^2 +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)^2 +
cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) -
2*sin(b*x)^2*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)^2 +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)^2 +
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*cos(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) -
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)))

 ans =

 4*x^10*(sin(x)*sinh(x) - (cos(x*(2*b - 1))*cosh(x))/2 +
(cosh(x*(2*b - 1))*cos(x))/2 + (sin(x*(2*b - 1))*sinh(x))/2 +
(sinh(x*(2*b - 1))*sin(x))/2 + 2*sin(b*x)*sinh(b*x))
```

Una vez obtenido el determinante de la matriz se calcularán las raíces de la función obtenida en función de los diferentes valores de "b", es decir, 0.2, 0.5 y 0.8. Para ello se declarará una función anónima dependiente de "b" para después evaluarla con los diferentes valores.

```
>> % Se declara la función anónima dependiente de b con el resultado del determinante

>> f=@(b) 4*x^10*(sin(x)*sinh(x) - (cos(x*(2*b - 1))*cosh(x))/2
+ (cosh(x*(2*b - 1))*cos(x))/2 + (sin(x*(2*b - 1))*sinh(x))/2 +
(sinh(x*(2*b - 1))*sin(x))/2 + 2*sin(b*x)*sinh(b*x));

>> % RAICES CUANDO b=0.2

>> % Se evalúa la función en b=0.2

>> f(0.2)

 ans =

4*x^10*(sin(x)*sinh(x) - (cos((3*x)/5)*cosh(x))/2 +
(cosh((3*x)/5)*cos(x))/2 - (sin((3*x)/5)*sinh(x))/2 -
(sinh((3*x)/5)*sin(x))/2 + 2*sin(x/5)*sinh(x/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x) 4*x^10*(sin(x)*sinh(x) - (cos((3*x)/5)*cosh(x))/2 +
(cosh((3*x)/5)*cos(x))/2 - (sin((3*x)/5)*sinh(x))/2 -
(sinh((3*x)/5)*sin(x))/2 + 2*sin(x/5)*sinh(x/5));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    2.1801

>> fzero(g,5)

ans =

    5.5381

>> fzero(g,8)

ans =

    9.3385

>> fzero(g,12)

ans =

   13.0891

>> % RAICES CUANDO b=0.5

>> % Se evalúa la función en b=0.5
```

```
>> f(0.5)

 ans =

4*x^10*(cos(x)/2 - cosh(x)/2 + sin(x)*sinh(x) +
2*sin(x/2)*sinh(x/2))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x) 4*x^10*(cos(x)/2 - cosh(x)/2 + sin(x)*sinh(x) +
2*sin(x/2)*sinh(x/2));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    3.0118

>> fzero(g,6)

ans =

    6.8262

>> fzero(g,8)

ans =

    8.8745

>> fzero(g,12)

ans =

   13.0891

>> % RAICES CUANDO b=0.8

>> % Se evalúa la función en b=0.8

>> f(0.8)

 ans =

4*x^10*(sin(x)*sinh(x) - (cos((3*x)/5)*cosh(x))/2 +
(cosh((3*x)/5)*cos(x))/2 + (sin((3*x)/5)*sinh(x))/2 +
(sinh((3*x)/5)*sin(x))/2 + 2*sin((4*x)/5)*sinh((4*x)/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior
```

```
>> g=@(x) 4*x^10*(sin(x)*sinh(x) - (cos((3*x)/5)*cosh(x))/2 +
(cosh((3*x)/5)*cos(x))/2 + (sin((3*x)/5)*sinh(x))/2 +
(sinh((3*x)/5)*sin(x))/2 + 2*sin((4*x)/5)*sinh((4*x)/5));


>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    3.8235

>> fzero(g,6)

ans =

    6.7405

>> fzero(g,9)

ans =

    8.9577

>> fzero(g,12)

ans =

   12.3888
```

3.2.3. Procedimiento de cálculo en una viga con 2 apoyos simples y un extremo empotrado.

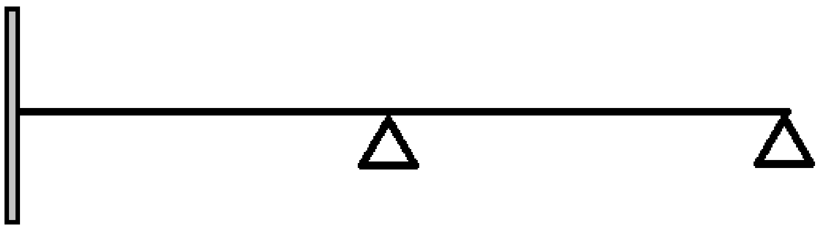


Imagen 3.2.3.1. Viga empotrada con 2 apoyos simples.

Si se aplican las condiciones de contorno a los apoyos de la viga de la figura se obtendrán las siguientes ecuaciones:

- Desplazamiento nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset_1(0) = 0;$

- Giro nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset'_1(0) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 1): $\emptyset_1(\mathrm{b}) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 2): $\emptyset_2(\mathrm{b}) = 0$;
- Giro en x/L=b del vano 1 igual al giro en x/L=b del vano 2: $\emptyset'_1(\mathrm{b}) = \emptyset'_2(\mathrm{b})$;
- Momento en x/L=b del vano 1 igual al momento en x/L=b del vano 2: $\emptyset''_1(\mathrm{b}) = \emptyset''_2(\mathrm{b})$;
- Desplazamiento nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset_2(1) = 0$;
- Momento flector nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset''_2(1) = 0$;

Atendiendo a las anteriores condiciones de contorno se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

1. $C_2 + C_4 = 0$;
2. $C_1\beta + C_3\beta = 0$;
3. $C_1 sen(\beta b) + C_2 \cos(\beta b) + C_3 senh(\beta b) + C_4 \cosh(\beta b) = 0$;
4. $C_5 sen(\beta b) + C_6 \cos(\beta b) + C_7 senh(\beta b) + C_8 \cosh(\beta b) = 0$;
5. $C_1\beta \cos(\beta b) - C_2\beta sen(\beta b) + C_3\beta \cosh(\beta b) + C_4\beta senh(\beta b) - C_5\beta \cos(\beta b) + C_6\beta sen(\beta b) - C_7\beta \cos h(\beta b) - C_8\beta senh(\beta b) = 0$;
6. $-C_1\beta^2 sen(\beta b) - C_2\beta^2 \cos(\beta b) + C_3\beta^2 senh(\beta b) + C_4\beta^2 \cosh(\beta b) + C_5\beta^2 sen(\beta b) + C_6\beta^2 \cos(\beta b) - C_7\beta^2 senh(\beta b) - C_8\beta^2 \cosh(\beta b) = 0$;
7. $C_5 sen(\beta) + C_6 \cos(\beta) + C_7 senh(\beta) + C_8 \cosh(\beta) = 0$;
8. $-C_5\beta^2 sen(\beta) - C_6\beta^2 \cos(\beta) + C_7\beta^2 senh(\beta) + C_8\beta^2 \cosh(\beta) = 0$;

La matriz del sistema de ecuaciones anterior se puede representar de la siguiente forma:

```
C =

[              0,              1,             0,             1,            0,            0,              0,              0]
[              x,              0,             x,             0,            0,            0,              0,              0]
[     sin(b*x),       cos(b*x),     sinh(b*x),     cosh(b*x),            0,            0,              0,              0]
[              0,              0,             0,             0,     sin(b*x),     cos(b*x),      sinh(b*x),      cosh(b*x)]
[    x*cos(b*x),    -x*sin(b*x),   x*cosh(b*x),   x*sinh(b*x),  -x*cos(b*x),   x*sin(b*x),   -x*cosh(b*x),   -x*sinh(b*x)]
[ -x^2*sin(b*x), -x^2*cos(b*x), x^2*sinh(b*x), x^2*cosh(b*x), x^2*sin(b*x), x^2*cos(b*x), -x^2*sinh(b*x), -x^2*cosh(b*x)]
[              0,              0,             0,             0,       sin(x),       cos(x),        sinh(x),        cosh(x)]
[              0,              0,             0,             0,  -x^2*sin(x),  -x^2*cos(x),     x^2*sinh(x),    x^2*cosh(x)]
```

Imagen 3.2.3.2. Matriz [C] del sistema de ecuaciones representada en Matlab.

Siendo [C] una matriz que depende de "β", donde "x" representa el valor "β" para simplificar la sintaxis en Matlab, cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se obtendrá el determinante de [C] para más tarde evaluarlo en función de “b” siendo su solución la siguiente:

```
>> det(C)

 ans =

 -4*x^6*(cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cos(x)*cosh(x)-
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cos(x)*sinh(x)-
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*cosh(x)+
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x))

>> % Se simplifica el resultado del determinante

>>simplify(-4*x^6*(cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cos(x)*cosh(x)-
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cos(x)*sinh(x)-
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*cosh(x)+
```

```
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)))

 ans =

 -4*x^6*(2*sin(x*(b - 1))*sinh(x*(b - 1)) - sin(x)*sinh(x) +
(cos(x*(2*b - 1))*cosh(x))/2 - (cosh(x*(2*b - 1))*cos(x))/2 +
(sin(x*(2*b - 1))*sinh(x))/2 + (sinh(x*(2*b - 1))*sin(x))/2)
```

Una vez obtenido el determinante de la matriz se calcularán las raíces de la función obtenida en función de los diferentes valores de “b”, es decir, 0.2, 0.5 y 0.8. Para ello se declarará una función anónima dependiente de “b” para después evaluarla con los diferentes valores.

```
>> % Se declara la función anónima dependiente de b con el
resultado del determinante

>> f=@(b)-4*x^6*(2*sin(x*(b - 1))*sinh(x*(b - 1)) -
sin(x)*sinh(x) + (cos(x*(2*b - 1))*cosh(x))/2 - (cosh(x*(2*b -
1))*cos(x))/2 + (sin(x*(2*b - 1))*sinh(x))/2 + (sinh(x*(2*b -
1))*sin(x))/2);

>> % RAICES CUANDO b=0.2

>> % Se evalúa la función en b=0.2

>> f(0.2)

 ans =
```

```
4*x^6*(sin(x)*sinh(x) - (cos((3*x)/5)*cosh(x))/2 +
(cosh((3*x)/5)*cos(x))/2 + (sin((3*x)/5)*sinh(x))/2 +
(sinh((3*x)/5)*sin(x))/2 - 2*sin((4*x)/5)*sinh((4*x)/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x)4*x^6*(sin(x)*sinh(x) - (cos((3*x)/5)*cosh(x))/2 +
(cosh((3*x)/5)*cos(x))/2 + (sin((3*x)/5)*sinh(x))/2 +
(sinh((3*x)/5)*sin(x))/2 - 2*sin((4*x)/5)*sinh((4*x)/5));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    4.6739

>> fzero(g,7)

ans =

    8.4695

>> fzero(g,11)

ans =

   12.2832

>> fzero(g,15)

ans =

   16.0717

>> % RAICES CUANDO b=0.5

>> % Se evalúa la función en b=0.5

>> f(0.5)

 ans =

4*x^6*(cos(x)/2 - cosh(x)/2 + sin(x)*sinh(x) -
2*sin(x/2)*sinh(x/2))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x) 4*x^6*(cos(x)/2 - cosh(x)/2 + sin(x)*sinh(x) -
2*sin(x/2)*sinh(x/2));

>> % Se obtienen las raíces con fzero
```

```
>> fzero(g,1)

ans =

    6.7865

>> fzero(g,9)

ans =

    8.9266

>> fzero(g,12)

ans =

   13.0908

>> fzero(g,15)

ans =

   15.1832

>> % RAICES CUANDO b=0.8

>> % Se evalúa la función en b=0.8

>> f(0.8)

 ans =

-4*x^6*((cos((3*x)/5)*cosh(x))/2 - sin(x)*sinh(x) -
(cosh((3*x)/5)*cos(x))/2 + (sin((3*x)/5)*sinh(x))/2 +
(sinh((3*x)/5)*sin(x))/2 + 2*sin(x/5)*sinh(x/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x) -4*x^6*((cos((3*x)/5)*cosh(x))/2 - sin(x)*sinh(x) -
(cosh((3*x)/5)*cos(x))/2 + (sin((3*x)/5)*sinh(x))/2 +
(sinh((3*x)/5)*sin(x))/2 + 2*sin(x/5)*sinh(x/5));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    5.5775

>> fzero(g,8)

ans =

    9.3370
```

```
>> fzero(g,12)

ans =

   13.0892

>> fzero(g,15)

ans =

   16.4345
```

3.2.4. Procedimiento de cálculo en una viga empotrada con un apoyo simple.

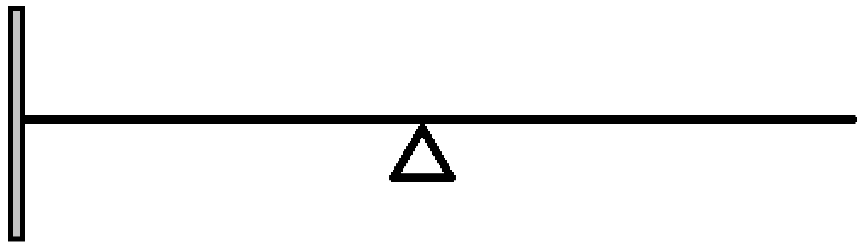


Imagen 3.2.4.1. Viga empotrada con apoyo simple.

Aplicando las condiciones de contorno según los apoyos de la viga del ejemplo se obtienen las siguientes ecuaciones:

- Desplazamiento nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset_1(0) = 0$;
- Giro nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset'_1(0) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 1): $\emptyset_1(\mathrm{b}) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 2): $\emptyset_2(\mathrm{b}) = 0$;
- Giro en x/L=b del vano 1 igual al giro en x/L=b del vano 2: $\emptyset'_1(\mathrm{b}) = \emptyset'_2(\mathrm{b})$;
- Momento en x/L=b del vano 1 igual al momento en x/L=b del vano 2: $\emptyset''_1(\mathrm{b}) = \emptyset''_2(\mathrm{b})$;
- Momento flector nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset''_2(1) = 0$;
- Esfuerzo cortante nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset'''_2(1) = 0$;

A partir de las anteriores condiciones de contorno se obtiene el siguiente sistema de 8 ecuaciones:

1. $C_2 + C_4 = 0$;

2. $C_1\beta + C_3\beta = 0;$
3. $C_1 sen(\beta b) + C_2 \cos(\beta b) + C_3 senh(\beta b) + C_4 \cosh(\beta b) = 0;$
4. $C_5 sen(\beta b) + C_6 \cos(\beta b) + C_7 senh(\beta b) + C_8 \cosh(\beta b) = 0\,;$
5. $C_1\beta \cos(\beta b) - C_2\beta sen(\beta b) + C_3\beta \cosh(\beta b) + C_4\beta senh(\beta b) -$
   $C_5\beta \cos(\beta b) + C_6\beta sen(\beta b) - C_7\beta \cos h(\beta b) - C_8\beta senh(\beta b) = 0;$
6. $-C_1\beta^2 sen(\beta b) - C_2\beta^2 \cos(\beta b) + C_3\beta^2 senh(\beta b) + C_4\beta^2 \cosh(\beta b) +$
   $C_5\beta^2 sen(\beta b) + C_6\beta^2 \cos(\beta b) - C_7\beta^2 senh(\beta b) - C_8\beta^2 \cosh(\beta b) = 0;$
7. $-C_5\beta^2 sen(\beta) - C_6\beta^2 \cos(\beta) + C_7\beta^2 senh(\beta) + C_8\beta^2 \cosh(\beta) = 0;$
8. $-C_5\beta^3 \cos(\beta) + C_6\beta^3 sen(\beta) + C_7\beta^3 \cosh(\beta) + C_8\beta^3 senh(\beta) = 0;$

Siendo la matriz del anterior sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

```
D =

[            0,             1,             0,             1,            0,            0,             0,             0]
[            x,             0,             x,             0,            0,            0,             0,             0]
[     sin(b*x),      cos(b*x),     sinh(b*x),     cosh(b*x),            0,            0,             0,             0]
[            0,             0,             0,             0,     sin(b*x),     cos(b*x),     sinh(b*x),     cosh(b*x)]
[   x*cos(b*x),   -x*sin(b*x),   x*cosh(b*x),   x*sinh(b*x),  -x*cos(b*x),   x*sin(b*x),  -x*cosh(b*x),  -x*sinh(b*x)]
[ -x^2*sin(b*x), -x^2*cos(b*x), x^2*sinh(b*x), x^2*cosh(b*x), x^2*sin(b*x), x^2*cos(b*x), -x^2*sinh(b*x), -x^2*cosh(b*x)]
[            0,             0,             0,             0,  -x^2*sin(x),  -x^2*cos(x),    x^2*sinh(x),    x^2*cosh(x)]
[            0,             0,             0,             0,  -x^3*cos(x),    x^3*sin(x),    x^3*cosh(x),    x^3*sinh(x)]
```

Imagen 3.2.4.2. Matriz [D] del sistema de ecuaciones representada en Matlab.

Siendo [D] una matriz que depende de "β", donde "x" representa el valor "β" para simplificar la sintaxis en Matlab, cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se obtendrá el determinante de [D] para más tarde evaluarlo en función de "b" siendo su solución la siguiente:

```
>> det(D)

 ans =

 -2*x^9*(cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)^2+
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)^2 + cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cosh(x)^2 -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)^2 + cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)^2 +
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)^2 - cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sinh(x)^2 +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sinh(x)^2+
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sinh(x)^2-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)^2-
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
2*cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
2*cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
```

```
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sin(x)*sinh(x)+
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x)+
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x)-
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)-
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)^2+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cosh(x)^2-
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)^2-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)^2-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)^2-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(x)^2+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x)-
2*cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
2*cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
2*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x))

>> % Debido a la gran extensión del determinante se simplifica
su resultado

>>simplify(-2*x^9*(cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)^2+
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)^2 + cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cosh(x)^2 -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)^2 + cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)^2 +
```

```
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)^2 - cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sinh(x)^2 +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sinh(x)^2+
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sinh(x)^2-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)^2-
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
2*cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
2*cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sin(x)*sinh(x)+
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x)+
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x)-
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)-
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)^2+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cosh(x)^2-
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)^2-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)^2-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)^2-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(x)^2+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x)-
2*cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
2*cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
```

```
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
2*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)))

 ans =

 2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) - 2*sin(x*(b -
1))*cosh(x*(b - 1)) + 2*sinh(x*(b - 1))*cos(x*(b - 1)) +
cos(x*(2*b - 1))*sinh(x) - cosh(x*(2*b - 1))*sin(x) +
2*cos(b*x)*sinh(b*x) - 2*cosh(b*x)*sin(b*x))
```

Una vez obtenido el determinante de la matriz se calcularán las raíces de la función obtenida en función de los diferentes valores de “b”, es decir, 0.2, 0.5 y 0.8. Para ello se declarará una función anónima dependiente de “b” para después evaluarla con los diferentes valores.

```
>> % Se declara la función anónima dependiente de b con el resultado del determinante

>>f=@(b)2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) - 2*sin(x*(b -
1))*cosh(x*(b - 1)) + 2*sinh(x*(b - 1))*cos(x*(b - 1)) +
cos(x*(2*b - 1))*sinh(x) - cosh(x*(2*b - 1))*sin(x) +
2*cos(b*x)*sinh(b*x) - 2*cosh(b*x)*sin(b*x));

>> % RAICES CUANDO b=0.2

>> % Se evalúa la función en b=0.2

>> f(0.2)

ans =

2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + cos((3*x)/5)*sinh(x) -
cosh((3*x)/5)*sin(x) + 2*cos(x/5)*sinh(x/5) -
2*cosh(x/5)*sin(x/5) - 2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) +
2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>>g=@(x) 2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) +
cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x) +
2*cos(x/5)*sinh(x/5) - 2*cosh(x/5)*sin(x/5) -
2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) + 2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    2.2160

>> fzero(g,5)

ans =
```

```
    5.5989

>> fzero(g,8)

ans =

    9.4232

>> fzero(g,12)

ans =

   13.2353

>> % RAICES CUANDO b=0.5

>> % Se evalúa la función en b=0.5

>> f(0.5)

 ans =

-2*x^9*(sin(x) - sinh(x) - cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>>g=@(x)-2*x^9*(sin(x) - sinh(x) - cos(x)*sinh(x) +
cosh(x)*sin(x));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    3.1416

>> fzero(g,6)

ans =

    7.8532

>> fzero(g,9)

ans =

    9.4248

>> fzero(g,13)

ans =

   14.1372

>> % RAICES CUANDO b=0.8
```

```
>> % Se evalúa la función en b=0.8

>> f(0.8)

 ans =

2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + cos((3*x)/5)*sinh(x) -
cosh((3*x)/5)*sin(x) - 2*cos(x/5)*sinh(x/5) +
2*cosh(x/5)*sin(x/5) + 2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) -
2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>>g=@(x) 2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) +
cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x) -
2*cos(x/5)*sinh(x/5) + 2*cosh(x/5)*sin(x/5) +
2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) - 2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    4.6826

>> fzero(g,7)

ans =

    7.2359

>> fzero(g,9)

ans =

   9.7364

>> fzero(g,12)

ans =

   13.3142
```

3.2.5. Procedimiento de cálculo en una viga biempotrada con un apoyo simple central.

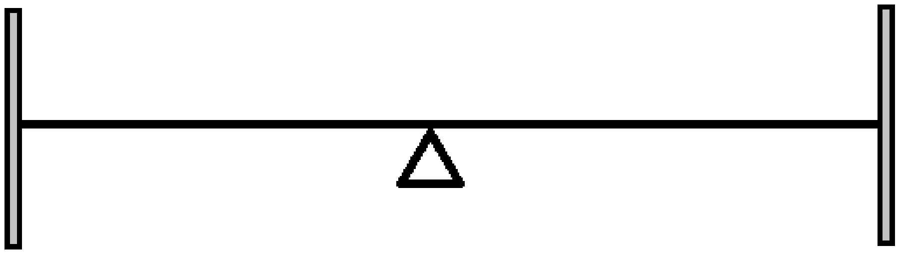


Imagen 3.2.5.1. Viga biempotrada con apoyo central.

Si se aplican las condiciones de contorno según los apoyos de esta viga se obtienen las siguientes ecuaciones:

- Desplazamiento nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset_1(0) = 0$;
- Giro nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset'_1(0) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 1): $\emptyset_1(\mathrm{b}) = 0$;
- Desplazamiento nulo en x/L=b (vano 2): $\emptyset_2(\mathrm{b}) = 0$;
- Giro en x/L=b del vano 1 igual al giro en x/L=b del vano 2: $\emptyset'_1(\mathrm{b}) = \emptyset'_2(\mathrm{b})$;
- Momento en x/L=b del vano 1 igual al momento en x/L=b del vano 2: $\emptyset''_1(\mathrm{b}) = \emptyset''_2(\mathrm{b})$;
- Desplazamiento nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset_2(1) = 0$;
- Giro en x/L=1 (vano 2): $\emptyset'_2(1) = 0$;

Según las anteriores condiciones de contorno se obtendrá el siguiente sistema de 8 ecuaciones:

1. $C_2 + C_4 = 0;$
2. $C_1\beta + C_3\beta = 0;$
3. $C_1 sen(\beta b) + C_2 \cos(\beta b) + C_3 senh(\beta b) + C_4 \cosh(\beta b) = 0\,;$
4. $C_5 sen(\beta b) + C_6 \cos(\beta b) + C_7 senh(\beta b) + C_8 \cosh(\beta b) = 0\,;$
5. $C_1\beta \cos(\beta b) - C_2\beta sen(\beta b) + C_3\beta \cosh(\beta b) + C_4\beta senh(\beta b) - C_5\beta \cos(\beta b) + C_6\beta sen(\beta b) - C_7\beta \cos h(\beta b) - C_8\beta senh(\beta b) = 0;$
6. $-C_1\beta^2 sen(\beta b) - C_2\beta^2 \cos(\beta b) + C_3\beta^2 senh(\beta b) + C_4\beta^2 \cosh(\beta b) + C_5\beta^2 sen(\beta b) + C_6\beta^2 \cos(\beta b) - C_7\beta^2 senh(\beta b) - C_8\beta^2 \cosh(\beta b) = 0;$
7. $C_5 sen(\beta) + C_6 \cos(\beta) + C_7 senh(\beta) + C_8 \cosh(\beta) = 0;$

8. $C_5\beta\cos(\beta) - C_6\beta sen(\beta) + C_7\beta\cosh(\beta) + C_8\beta senh(\beta) = 0;$

Del anterior sistema de ecuaciones se obtiene la siguiente matriz:

```
E =

[            0,            1,           0,           1,           0,           0,            0,            0]
[            x,            0,           x,           0,           0,           0,            0,            0]
[     sin(b*x),     cos(b*x),   sinh(b*x),   cosh(b*x),           0,           0,            0,            0]
[            0,            0,           0,           0,    sin(b*x),    cos(b*x),    sinh(b*x),    cosh(b*x)]
[   x*cos(b*x),  -x*sin(b*x), x*cosh(b*x), x*sinh(b*x), -x*cos(b*x),  x*sin(b*x), -x*cosh(b*x), -x*sinh(b*x)]
[ -x^2*sin(b*x), -x^2*cos(b*x), x^2*sinh(b*x), x^2*cosh(b*x), x^2*sin(b*x), x^2*cos(b*x), -x^2*sinh(b*x), -x^2*cosh(b*x)]
[            0,            0,           0,           0,      sin(x),      cos(x),      sinh(x),      cosh(x)]
[            0,            0,           0,           0,    x*cos(x),   -x*sin(x),    x*cosh(x),    x*sinh(x)]
```

Imagen 3.2.5.2. Matriz [E] del sistema de ecuaciones representada en Matlab.

Siendo [E] una matriz que depende de "β", donde "x" representa el valor "β" para simplificar la sintaxis en Matlab, cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se obtendrá el determinante de [E] para más tarde evaluarlo en función de "b" siendo su solución la siguiente:

```
>> det(E)

 ans =

 -2*x^5*(cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)^2 +
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)^2 + cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cosh(x)^2 -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)^2 + cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)^2 +
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)^2 - cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sinh(x)^2 +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sinh(x)^2 +
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sinh(x)^2 -
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)^2 +
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) -
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) -
2*cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) -
2*cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x) -
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cosh(x)*sin(x) +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) -
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)*sinh(x) -
```

```
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sin(x)*sinh(x) -
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x) -
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x) +
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)^2 +
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cosh(x)^2 -
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)^2 -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)^2 -
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)^2 -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(x)^2 -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) +
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) +
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x) +
2*cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
2*cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) +
2*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x))

>> % Se simplifica el valor del determinante debido a su larga
extensión

>> simplify(-2*x^5*(cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)^2 +
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)^2 + cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cosh(x)^2 -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)^2 + cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)^2 +
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)^2 - cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sinh(x)^2 +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sinh(x)^2 +
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sinh(x)^2 -
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)^2 +
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) -
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) -
2*cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) -
2*cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*cosh(x) -
```

```
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x) -
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cosh(x)*sin(x) +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) -
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)*sinh(x) -
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sin(x)*sinh(x) -
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x) -
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x) +
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)^2 +
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cosh(x)^2 -
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)^2 -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)^2 -
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)^2 -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(x)^2 -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) +
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) +
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x) +
2*cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
2*cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) +
2*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)))

 ans =

 -2*x^5*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) - 2*sin(x*(b -
1))*cosh(x*(b - 1)) + 2*sinh(x*(b - 1))*cos(x*(b - 1)) +
cos(x*(2*b - 1))*sinh(x) - cosh(x*(2*b - 1))*sin(x) -
2*cos(b*x)*sinh(b*x) + 2*cosh(b*x)*sin(b*x))
```

Una vez obtenido el determinante de la matriz se calcularán las raíces de la función obtenida en función de los diferentes valores de "b", es decir, 0.2, 0.5 y 0.8. Para ello se declarará una función anónima dependiente de "b" para después evaluarla con los diferentes valores.

```
>> % Se declara la función anónima dependiente de b con el resultado del determinante

>> f=@(b) -2*x^5*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) - 2*sin(x*(b - 1))*cosh(x*(b - 1)) + 2*sinh(x*(b - 1))*cos(x*(b - 1)) + cos(x*(2*b - 1))*sinh(x) - cosh(x*(2*b - 1))*sin(x) - 2*cos(b*x)*sinh(b*x) + 2*cosh(b*x)*sin(b*x));

>> % RAICES CUANDO b=0.2

>> % Se evalúa la función en b=0.2

>> f(0.2)

 ans =

-2*x^5*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x) - 2*cos(x/5)*sinh(x/5) + 2*cosh(x/5)*sin(x/5) - 2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) + 2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x) -2*x^5*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x) - 2*cos(x/5)*sinh(x/5) + 2*cosh(x/5)*sin(x/5) - 2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) + 2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    5.6399

>> fzero(g,8)

ans =

    9.4215

>> fzero(g,12)

ans =

   13.2354
```

```
>> fzero(g,16)

ans =

   17.0022

>> % RAICES CUANDO b=0.5

>> % Se evalúa la función en b=0.5

>> f(0.5)

 ans =

2*x^5*(sin(x) - sinh(x) - cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x) +
4*cos(x/2)*sinh(x/2) - 4*cosh(x/2)*sin(x/2))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x)2*x^5*(sin(x) - sinh(x) - cos(x)*sinh(x) +
cosh(x)*sin(x) + 4*cos(x/2)*sinh(x/2) - 4*cosh(x/2)*sin(x/2));

>> % Se obtienen las raíces mediante fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    7.8532

>> fzero(g,9)

ans =

    9.4601

>> fzero(g,13)

ans =

   14.1372

>> fzero(g,15)

ans =

   15.7064

>> % RAICES CUANDO b=0.8

>> % Se evalúa la función en b=0.8

>> f(0.8)

 ans =
```

```
-2*x^5*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + cos((3*x)/5)*sinh(x) -
cosh((3*x)/5)*sin(x) - 2*cos(x/5)*sinh(x/5) +
2*cosh(x/5)*sin(x/5) - 2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) +
2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>> g=@(x) -2*x^5*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) +
cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x) -
2*cos(x/5)*sinh(x/5) + 2*cosh(x/5)*sin(x/5) -
2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) + 2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5));

>> % Se obtienen las raíces con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    5.6399

>> fzero(g,8)

ans =

    9.4215

>> fzero(g,12)

ans =

   13.2354

>> fzero(g,16)

ans =

   17.0022
```

3.2.6. Procedimiento de cálculo en una viga biempotrada con una rótula a lo largo de su longitud.

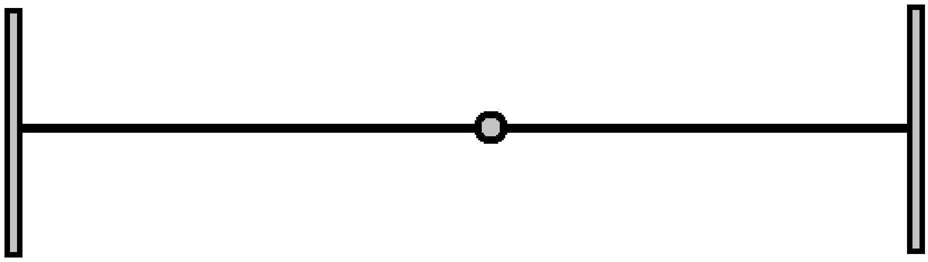


Imagen 3.2.6.1. Viga biempotrada con rotula central.

Aplicando las pertinentes ecuaciones de contorno se obtendrán las siguientes ecuaciones:

- Desplazamiento nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset_1(0) = 0$;
- Giro nulo en x/L=0 (vano 1): $\emptyset'_1(0) = 0$;
- Momento flector nulo en x/L=b (vano 1): $\emptyset''_1(\mathrm{b}) = 0$;
- Momento flector nulo en x/L=b (vano 2): $\emptyset''_2(\mathrm{b}) = 0$;
- Desplazamiento en x/L=b del vano 1 igual al desplazamienro en x/L=b del vano 2: $\emptyset_1(\mathrm{b}) = \emptyset_2(\mathrm{b})$;
- Esfuerzo cortante en x/L=b del vano 1 igual al esfuerzo cortante en x/L=b del vano 2: $\emptyset'''_1(\mathrm{b}) = \emptyset'''_2(\mathrm{b})$;
- Desplazamiento nulo en x/L=1 (vano 2): $\emptyset_2(1) = 0$;
- Giro en x/L=1 (vano 2): $\emptyset'_2(1) = 0$;

Según las anteriores condiciones de contorno se obtiene el siguiente sistema de 8 ecuaciones:

1. $C_2 + C_4 = 0$;
2. $C_1\beta + C_3\beta = 0$;
3. $-C_1\beta^2 sen(\beta b) - C_2\beta^2 \cos(\beta b) + C_3\beta^2 senh(\beta b) + C_4\beta^2 \cosh(\beta b) = 0$;
4. $-C_5\beta^2 sen(\beta b) - C_6\beta^2 \cos(\beta b) + C_7\beta^2 senh(\beta b) + C_8\beta^2 \cosh(\beta b) = 0$;
5. $C_1 sen(\beta b) + C_2 cos(\beta b) + C_3 senh(\beta b) + C_4 cosh(\beta b) - C_5 sen(\beta b) - C_6 cos(\beta b) - C_7 senh(\beta b) - C_8 cosh(\beta b) = 0$;
6. $-C_1\beta^3 cos(\beta b) + C_2\beta^3 sen(\beta b) + C_3\beta^3 \cosh(\beta b) + C_4\beta^3 senh(\beta b) + C_5\beta^3 \cos(\beta b) - C_6\beta^3 sen(\beta b) - C_7\beta^3 \cos h(\beta b) - C_8\beta^3 senh(\beta b) = 0$;
7. $C_5 sen(\beta) + C_6 \cos(\beta) + C_7 senh(\beta) + C_8 \cosh(\beta) = 0$;
8. $C_5\beta \cos(\beta) - C_6\beta sen(\beta) + C_7\beta \cosh(\beta) + C_8\beta senh(\beta) = 0$;

Del anterior sistema de ecuaciones se obtiene la matriz de dicho sistema que será de la siguiente forma:

```
F =

[             0,             1,             0,             1,             0,             0,             0,             0]
[             x,             0,             x,             0,             0,             0,             0,             0]
[ -x^2*sin(b*x), -x^2*cos(b*x), x^2*sinh(b*x), x^2*cosh(b*x),             0,             0,             0,             0]
[             0,             0,             0,             0, -x^2*sin(b*x), -x^2*cos(b*x), x^2*sinh(b*x), x^2*cosh(b*x)]
[      sin(b*x),      cos(b*x),     sinh(b*x),     cosh(b*x),     -sin(b*x),     -cos(b*x),    -sinh(b*x),    -cosh(b*x)]
[ -x^3*cos(b*x),  x^3*sin(b*x), x^3*cosh(b*x), x^3*sinh(b*x),  x^3*cos(b*x), -x^3*sin(b*x), -x^3*cosh(b*x), -x^3*sinh(b*x)]
[             0,             0,             0,             0,        sin(x),        cos(x),       sinh(x),       cosh(x)]
[             0,             0,             0,             0,      x*cos(x),     -x*sin(x),     x*cosh(x),     x*sinh(x)]
```

Imagen 3.2.6.2. Matriz [F] del sistema de ecuaciones representada en Matlab

Siendo [F] una matriz que depende de "β", donde "x" representa el valor "β" para simplificar la sintaxis en Matlab, cuyo determinante debe ser igual a 0 para que el sistema tenga solución.

A continuación se obtendrá el determinante de [F] para más tarde evaluarlo en función de "b" siendo su solución la siguiente:

```
>> det(F)

 ans =

 -2*x^9*(cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)^2+
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)^2 + cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cosh(x)^2 -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)^2 + cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)^2 +
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)^2 - cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sinh(x)^2 +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sinh(x)^2+
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sinh(x)^2-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)^2-
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
2*cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
2*cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sin(x)*sinh(x)-
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x)-
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x)+
```

```
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)^2+
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cosh(x)^2-
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)^2-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)^2-
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)^2-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(x)^2-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x)+
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x)-
2*cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)-
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)-
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x)+
2*cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)+
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x)-
2*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x))

>> % Se simplifica el valor del determinante

>> simplify(-2*x^9*(cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)^2 +
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)^2 + cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cosh(x)^2 -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)^2 + cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)^2 +
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)^2 - cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sinh(x)^2 +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sinh(x)^2 +
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sinh(x)^2 -
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)^2 -
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) +
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) +
2*cos(b*x)^2*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) +
2*cosh(b*x)^2*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x) -
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
```

```
cos(b*x)^3*cosh(b*x)*cosh(x)*sin(x) +
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) -
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*sinh(b*x)^3*sin(x)*sinh(x) -
cosh(b*x)*sin(b*x)^3*sin(x)*sinh(x) -
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cos(x)*sinh(x) -
sin(b*x)*sinh(b*x)^3*cosh(x)*sin(x) +
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
sin(b*x)^3*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)^3*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cosh(b*x)^3*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)^2 +
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cosh(x)^2 -
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cosh(x)^2 -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)^2 -
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)^2 -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(x)^2 -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) +
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*cos(x)*cosh(x) +
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)*sinh(b*x)^2*cosh(x)*sin(x) +
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*cos(x)*cosh(x) -
2*cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sin(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cos(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) -
cos(b*x)*cosh(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) -
2*cos(b*x)^2*cosh(b*x)*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cos(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)^2*sin(b*x)*sinh(b*x)*cosh(x)*sin(x) +
2*cos(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) -
cos(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x) +
cosh(b*x)*sin(b*x)*sinh(b*x)^2*sin(x)*sinh(x) -
2*cosh(b*x)*sin(b*x)^2*sinh(b*x)*sin(x)*sinh(x)))

 ans =

 2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + 2*sin(x*(b -
1))*cosh(x*(b - 1)) - 2*sinh(x*(b - 1))*cos(x*(b - 1)) +
cos(x*(2*b - 1))*sinh(x) - cosh(x*(2*b - 1))*sin(x) +
2*cos(b*x)*sinh(b*x) - 2*cosh(b*x)*sin(b*x))
```

Una vez obtenido el determinante de la matriz se calcularán las raíces de la función obtenida en función de los diferentes valores de “b”, es decir, 0.2, 0.5 y 0.8. Para ello se declarará una función anónima dependiente de “b” para después evaluarla con los diferentes valores.

```
>> % Se declara la función anónima dependiente de b con el resultado del determinante

>>f=@(b) 2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + 2*sin(x*(b - 1))*cosh(x*(b - 1)) - 2*sinh(x*(b - 1))*cos(x*(b - 1)) + cos(x*(2*b - 1))*sinh(x) - cosh(x*(2*b - 1))*sin(x) + 2*cos(b*x)*sinh(b*x) - 2*cosh(b*x)*sin(b*x));

>> % RAICES CUANDO b=0.2

>> % Se evalúa la función en b=0.2

>> f(0.2)

 ans =

2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x) + 2*cos(x/5)*sinh(x/5) - 2*cosh(x/5)*sin(x/5) + 2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) - 2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>>g=@(x) 2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x) + 2*cos(x/5)*sinh(x/5) - 2*cosh(x/5)*sin(x/5) + 2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) - 2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5));

>> % Se obtienen las raíces mediante fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    4.7066

>> fzero(g,7)

ans =

    7.2258

>> fzero(g,9)

ans =

    9.7380
```

```
>> fzero(g,12)

ans =

   13.3141

>> % RAICES CUANDO b=0.5

>> % Se evalúa la función en b=0.5

>> f(0.5)

 ans =

-2*x^9*(sin(x) - sinh(x) - cos(x)*sinh(x) + cosh(x)*sin(x) -
4*cos(x/2)*sinh(x/2) + 4*cosh(x/2)*sin(x/2))

 >> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>>g=@(x) -2*x^9*(sin(x) - sinh(x) - cos(x)*sinh(x) +
cosh(x)*sin(x) - 4*cos(x/2)*sinh(x/2) + 4*cosh(x/2)*sin(x/2));

>> % Se obtienen las raices con fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    3.7502

>> fzero(g,6)

ans =

    7.8532

>> fzero(g,9)

ans =

    9.3882

>> fzero(g,13)

ans =

   14.1372

>> % RAICES CUANDO b=0.8

>> % Se evalúa la función en 0.8

>> f(0.8)

 ans =
```

```
2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) + cos((3*x)/5)*sinh(x) -
cosh((3*x)/5)*sin(x) + 2*cos(x/5)*sinh(x/5) -
2*cosh(x/5)*sin(x/5) + 2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) -
2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5))

>> % Una vez obtenida la función dependiente de x se declara
otra función anónima dependiente de x con el resultado anterior

>>g=@(x) 2*x^9*(cos(x)*sinh(x) - cosh(x)*sin(x) +
cos((3*x)/5)*sinh(x) - cosh((3*x)/5)*sin(x) +
2*cos(x/5)*sinh(x/5) - 2*cosh(x/5)*sin(x/5) +
2*cos((4*x)/5)*sinh((4*x)/5) - 2*cosh((4*x)/5)*sin((4*x)/5));

>> % Se obtienen las raíces mediante fzero

>> fzero(g,1)

ans =

    4.7066

>> fzero(g,7)

ans =

    7.2258

>> fzero(g,9)

ans =

    9.7380

>> fzero(g,12)

ans =

   13.3141
```

En la siguiente tabla se muestran todos los valores de “β” obtenidos para los dinstintos ejemplos de vigas analizados:

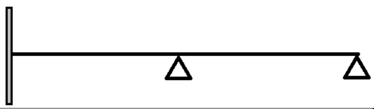
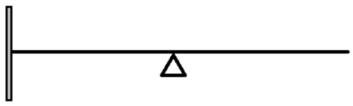
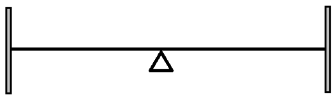
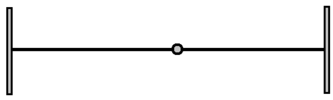
Ejemplo/valor de “β”	Valor de “b”	1º	2º	3º	4º
	0.2	4.6183	8.3915	12.1617	15.7080
	0.5	6.2832	7.8532	12.5664	14.1372
	0.8	4.6183	8.3915	12.1617	15.7080
	0.2	2.1801	5.5381	9.3385	13.0891
	0.5	3.0118	6.8262	8.8745	13.0891
	0.8	3.8235	6.7405	8.9577	12.3888
	0.2	4.6739	8.4695	12.2832	16.0717
	0.5	6.7865	8.9266	13.0908	15.1832
	0.8	5.5775	9.337	13.0892	16.4345
	0.2	2.216	5.5989	9.4232	13.2353
	0.5	3.1416	7.8532	9.4248	14.1372
	0.8	4.6826	7.2359	9.7364	13.3142
	0.2	5.6399	9.4215	13.2354	17.0022
	0.5	7.8532	9.4601	14.1372	15.7064
	0.8	5.6399	9.4215	13.2354	17.0022
	0.2	4.7066	7.2258	9.738	13.3141
	0.5	3.7502	7.8532	9.3882	14.1372
	0.8	4.7066	7.2258	9.738	13.3141

Tabla 3.2.1. Valores de “β” obtenidos en vigas de dos vanos.

4. Obtención de resultados.

Una vez obtenidos los valores de “β” en los diferentes ejemplos de vigas continuas analizados se obtendrán las frecuencias propias de cada uno de esos ejemplos. Para la obtención de las frecuencias propias de las vigas continuas se ha elegido una viga de longitud L=10m y perfil IPE 300 la cual tiene las siguientes propiedades:

- $E=2.1x10^{11}$ N/m^2
- $A= 5.38x10^{-3}m^2$
- $\rho= 7850$ kg/m^3
- $I= 8.356x10^{-5}m^4$

Como se expuso anteriormente, la formula para la obtención de las frecuencias propias es la siguiente

$$\omega = \frac{\beta^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Con los valores de “β” obtenidos y con las propiedades de la viga escogida se podrán calcular las frecuencias propias de dicha viga con sus diferentes apoyos y condiciones de contorno, frecuencias que vienen reflejadas en las siguientes tablas:

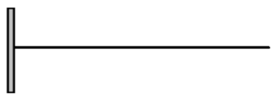
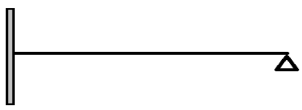
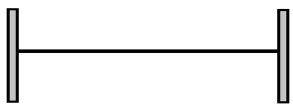
VIGAS DE UN VANO				
Ejemplo/frecuencia propia (rad/s)	1º	2º	3º	4º
	63.619	254.475	572.568	1017.899
	22.664	142.032	397.698	779.315
	99.384	322.07	671.972	1149.112
	144.213	397.536	779.329	1288.278

Tabla 4.1. Frecuencias propias en vigas de un vano en rad/s.

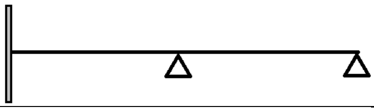
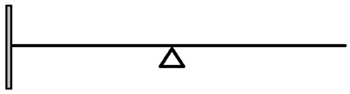
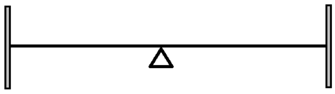
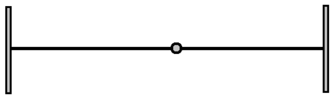
VIGAS DE DOS VANOS					
Ejemplo/frecuencia propia (rad/s)	Valor de “b”	1º	2º	3º	4º
	0.2	137.482	453.902	953.392	1590.467
	0.5	254.475	397.536	1017.899	1288.278
	0.8	137.482	453.902	953.392	1590.467
	0.2	30.636	197.699	562.130	1104.339
	0.5	58.47	300.359	507.657	1104.339
	0.8	94.233	292.865	517.221	989.33
	0.2	140.813	462.379	972.537	1664.97
	0.5	296.876	513.636	1104.626	1485.968
	0.8	200.522	561.95	1104.356	1740.988
	0.2	31.654	202.064	572.374	1129.147
	0.5	63.619	397.536	572.568	1288.278
	0.8	141.337	337.496	611.054	1142.65
	0.2	205.034	572.167	1129.164	1863.344
	0.5	397.536	576.865	1288.278	1590.143
	0.8	205.034	572.167	1129.164	1863.344
	0.2	142.79	336.554	611.255	1142.632
	0.5	90.655	397.536	568.13	1288.278
	0.8	142.79	336.554	611.255	1142.632

Tabla 4.2. Frecuencias propias en vigas de dos vanos en rad/s.

5. Conclusiones.

En este trabajo se han podido calcular las diferentes frecuencias propias en vigas continuas de dos vanos a partir de los procedimientos de cálculo de dichas frecuencias en vigas de un solo vano, presentes en multitud de libros. Para ello se ha creado y formulado un método de cálculo para la obtención de las frecuencias propias en vigas de dos vanos con el apoyo de la herramienta de cálculo matemático Matlab. Una vez ejecutado dicho método se obtuvo en valor adimensional "β" para más tarde, con las características de una viga cualquiera, en este caso una viga de sección IPE 300 de 10m de longitud, calcular las frecuencias propias correspondientes a cada ejemplo de viga con diferentes condiciones de contorno.

Una vez obtenidos todos los valores de las frecuencias propias en cada uno de los ejemplos propuestos se puede observar que el mayor condicionante del valor de la frecuencia propia son el número de coacciones externas que tiene cada ejemplo de viga continua. El valor de la frecuencia propia es mayor a medida que aumentan las coacciones externas en la viga, por eso la viga cuyas frecuencias propias toman valores más altos es la viga biempotrada con un apoyo intermedio (quinto ejemplo) ya que sobre ella actúan 8 coacciones externas, 3 de cada empotramiento mas otros 2 del apoyo simple, mientras que la viga cuyas frecuencias propias toman valores mas pequeños es la viga con 2 apoyos simples y un extremo libre pues únicamente actúan sobre ella 4 coacciones extrenas que provienen de los 2 apoyos que tiene, dos por cada apoyo.

Sabiendo lo anterior si se analizan las frecuencias de vibración en una viga en voladizo y una viga doblemente empotrada se puede ver que al hacerlas vibrar por medio de una excitación externa la frecuencia, es decir, el numero de veces que la viga vibra por segundo, será mayor en la viga biempotrada ya que al estar sujeta por sus dos extremos vibrará más rápido. Sin embargo, en la viga en voladizo, mientras que la frecuencia de vibración es menor, la amplitud de la vibración será mayor en la viga sobre la que actúan menos coacciones externas, ya que al tener un extremo libre tendrá más libertad de movimiento.

Tambien se pueden relacionar las frecuencias propias de las vigas de un vano con las de las vigas de dos vanos. El ejemplo más claro es la relación entre las frecuencias de la viga con 2 apoyos simples y las de la viga con 3 apoyos simples en el caso en el que b=0.5. Si se observan las frecuencias en ambos ejemplos se puede ver que varias frecuencias coinciden en su valor. Esto es debido a que cuando b=0.5, la viga de 2 vanos queda dividida en 2 partes de igual longitud, quedando 2 vigas de un vano con 2 apoyos simples en sus extremos. Además, para el cálculo del valor de "β" no influye la longitud, por esto los valores de "β" son iguales y al ser dicho valor idéntico, la frecuencia también lo será pues los demás valores para el cálculo de la frecuencia son constantes y conocidos.

Por último, otra de las conclusiones que se pueden sacar observando los resultados es que para los ejemplos de viga con 3 apoyos, biempotrada con apoyo y biempotrada con rótula, los valores de "β" y por tanto de la frecuencia propia, son los mismos en los casos en los que b=0.2 y b=0.8. Esto se debe a que las vigas son simétricas, por lo que si b=0.2 en un sistema de referencia de izquierda a derecha es lo mismo que decir que b=0.8 en un sistema de referencia de derecha a izquierda. Además, gracias a que dichos valores son idénticos cuando b=0.2 y b=0.8 se tiene la seguridad de que el método de resolución establecido es correcto, ya que la simetría de las vigas obliga a que los valores mencionados sean iguales.

Anexo.

-Anexo 1: Programa del método de bisección para la obtención de las raíces en los ejemplos de vigas de un vano.

```
% Inicialmente, se define la función manualmente, el intervalo a
evaluar y la precisión requerida en forma de tolerancia.

Function raiz=biseccion(def,x0,x1,tol)
f=inline(def);

% Inicio del contador de raíces.
Cont=0;
while cont<4;

% Barrido para hallar los puntos entre los cuales la función corta
% al eje x.
while f(x0)*f(x1)>0
    x0=x1;
    x1=x1+0.001;
end

% Se le da un valor inicial a x para comenzar el método de bisección.
X=x0;
while abs(f(x))>tol
    x=(x0+x1)/2;
    if f(x0)*f(x)<0
        x1=x;
    else
        x0=x;
    end
end

% Se muestra la raíz y se continúa con el barrido hasta obtener 4
raíces.
    X
    cont=cont+1;
    x0=x1;
    x1=x1+0.001;
end
```

-Anexo 2: Procedimiento de cálculo de raíces en los ejemplos de vigas de dos vanos.

```
>> syms x b;

>> % Se declara la matriz del sistema de ecuaciones

>> A=[sin(x),0,0;0,b,0;0,0,1]
```

```
A =

 [ sin(x), 0, 0]
[      0, b, 0]
[      0, 0, 1]

 >> % Se calcula el determinante de A
>> det(A)

 ans =

 b*sin(x)

 >> % Se declara la función anónima dependiente de b
>> f=@(b)b*sin(x);
>> % Ahora se puede evaluar la función f con diferentes valores
de b
>> f(1)

 ans =

 sin(x)

 >> % Se declara una función anónima dependiente de x
>> g=@(x)sin(x);
>> % Se obtiene la raíz utilizando fzero
>> fzero(g,3)
ans =

    3.1416
```

Bibliografía.

- Singiresu S. Rao (2007): *Vibration of continuous systems.* New Jersey: Wiley
- Rodrigo Pascual J. (2000): Apuntes ME 566, Vibraciones Mecánicas.
- Meruane, Viviana. Vibraciones Mecánicas. Departamento de ingeniería mecánica. Universidad de chile.
- Cuadrado Sanguino, Manuel (2016): Dinámica de estructuras. Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad Carlos III de Madrid.
- AutoFEM Analysis. Las frecuencias de vibración natural de un voladizo viga. http://www.autofem.com/examples/es/determining_natural_frequencie.html (Consulta: 5 de Julio de 2017)
- White, Glen. (2010): *Introducción al análisis de vibraciones.* Woburn, USA: Azima DLI.
- De Miguel Tejada, Alejandro. Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia. Trabajo de investigación tutelado. Universidad politécnica de Madrid. Junio 2011.